Sur l'aire des surfaces courbes.

Par TIBOR RADÓ à Szeged.

L'objet de ce travail est d'exposer d'une manière systématique les éléments de la théorie de l'aire — au sens de LEBESGUE — des surfaces courbes. Au § 1, consacré à l'analyse de la définition adoptée pour l'aire, j'ai résumé aussi certains observations de ZOÁRD de GEÖCZE et de MM. LEBESGUE et FRÉCHET concernant la conception intuitive de l'aire. Les développements du § 2, consacré à l'étude des relations entre l'aire d'une surface et la mesure de ses projections orthogonales sur des plans, se rattachent à certains résultats fondamentaux dus à Geöcze. Au troisième et dernier paragraphe je passe à l'étude des surfaces données par une équation $z=f(x,y)$; dans ce cas particulier, on obtient pour l'aire des formules explicites, valables sous la seule hypothèse de la continuité de la surface.

Ayant exprimé l'aire par une formule, les problèmes relatifs à l'aire deviennent accessibles aux méthodes générales de la théorie des fonctions de variables réelles. En particulier, les beaux résultats de M. TONELLI, concernant le calcul de l'aire par l'intégrale double classique, s'obtiennent très simplement à l'aide de la théorie des fonctions de rectangle, comme le montre M. S. SAKS dans l'article publié à la suite de ce travail, en exposant son remarquable théorème sur la dérivation de l'aire.

Les résultats que j'ai réunis dans le travail présent sont loin d'épuiser les connaissances actuelles sur l'aire au sens de LEBESGUE; en me bornant à l'exposition des faits les plus élémentaires, j'ai dû passer sous silence plusieurs résultats importants de M. LEBESGUE et de ZOÁRD de GEÖCZE. Il faut cependant remarquer que même en réunissant tous les résultats actuellement connus, on serait encore bien loin d'avoir une théorie. Par exemple, le problème du calcul de l'aire des surfaces données sous forme paramétrique n'est pas encore résolu. En outre, on sait fort peu de choses sur les relations de la définition de M. Lebesgue avec les autres définitions de l'aire, qui expriment pourtant autant de propriétés essentielles de ce que l'on pourrait appeler *aire intuitive.*

Je manquerais à un devoir élémentaire si je ne signalais pas mes longues conversations avec M. F. Riesz sur les diverses définitions de l'aire et leur rapport avec la théorie moderne de l'intégration, et avec M. B. de Kerékjártó sur les problèmes et notions d'ordre topologique intervenant au cours des raisonnements.

§ 1. Définition de l'aire.

1. Avant de définir l'aire, il faut se décider sur ce que l'on entendra par surface. Nous nous bornerons à la considération de *surfaces simples,* définies de la manière suivante. Un ensemble de points, situé dans l'espace à trois dimensions, constitue une surface simple s'il peut être considéré comme image biunivoque et continue du carré fermé. Donc, S étant une surface simple, il existe un système de trois fonctions $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ uniformes et continues dans le carré $Q: 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1$, de sorte qu'en désignant par x, y, z des coordonnées cartésiennes dans l'espace, les équations

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v)$$

établissent une correspondance biunivoque et continue entre les points de Q et de S. Inversement, si l'on donne trois fonctions $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ uniformes et continues dans le carré Q, et telles que les équations $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $z = \chi(u,v)$ font correspondre à deux points distincts de Q deux points distincts (x,y,z), les points (x,y,z) correspondant aux divers points de Q constituent une surface simple.

Nous dirons qu'une surface simple est *polyédrique* si l'on peut l'obtenir en réunissant un nombre fini de triangles sans points communs intérieurs. Étant donnée une surface simple polyédrique $\mathfrak{P}$, nous désignerons par $A[\mathfrak{P}]$ l'aire de $\mathfrak{P}$ au sens élémentaire, c'est-à-dire la somme des aires des faces triangulaires de $\mathfrak{P}$. Quant aux surfaces simples non-polyédriques, il faut évidemment introduire quelque convention concernant la mesure de l'aire; en effet, l'unité de mesure est un carré, c'est-à-dire une figure plane que l'on ne peut pas comparer directement à une surface courbe générale.

2. Nous adopterons pour l'aire la définition qui fut introduite par M. Lebesgue dans sa Thèse.[1]) Cette définition fait intervenir des suites de surfaces polyédriques tendant vers la surface proposée; il faut donc définir d'abord la notion de convergence dans le champ des surfaces simples. Nous nous servirons à cet effet de la notion importante, due à M. Fréchet, de l'*écart* de deux surfaces. Considérons deux surfaces simples S_1, S_2. Ces surfaces étant des images topologiques du carré, il est possible d'établir, et cela d'une infinité de manières, des transformations topologiques entre S_1 et S_2. Soit T une telle transformation, P_1 un point de S_1, P_2 le point correspondant de S_2. En faisant varier ces points, leur distance atteindra un maximum, que nous appellerons le *module de la transformation* T et que nous désignerons par la notation $\|T\|$. La limite inférieure des modules de toutes les transformations topologiques entre S_1 et S_2 est l'écart de ces surfaces. Nous dirons qu'une suite $\{S_n\}$ de surfaces simples tend vers une surface simple S, si l'écart de S_n et de S tend vers zéro.

Soit maintenant S une surface simple et soit $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S. En désignant comme plus haut par $A[\mathfrak{P}_n]$ l'aire au sens élémentaire de $\mathfrak{P}_n$, la suite $\{A[\mathfrak{P}_n]\}$ ne tendra en général vers aucune limite. Mais $\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n]$ existe toujours; c'est une quantité finie ou bien infinie positive, qui dépend de S et en outre du choix de la suite $\{\mathfrak{P}_n\}$. Les quantités $\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n]$, correspondant aux diverses suites $\{\mathfrak{P}_n\}$, constituent un ensemble de nombres non-négatifs; la limite inférieure, c'est-à-dire la plus grande borne inférieure, de cet ensemble de nombres est une quantité bien déterminée, finie ou bien infinie positive, ne dépendant plus que de S elle-même. Par définition, cette limite inférieure est l'aire de la surface simple S. Nous désignerons cette quantité, pour rappeler le nom de M. Lebesgue, par $L[S]$.

Nous avons ainsi attaché à toute surface simple S une quantité déterminée $L[S]$,[2]) c'est-à-dire nous avons définie une

[1]) Intégrale, longueur, aire, *Annali di Matematica*, serie III, t. VII, 1902, pp. 231—359.

[2]) Ceci suppose le théorème topologique que pour toute surface simple S il existe une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S. Je dois la connaissance de ce théorème à M. B. de Kerékjártó.

fonctionnelle dans le champ des surfaces simples. Pour le moment nous n'avons pas le droit d'affirmer que pour les surfaces simples polyédriques cette fonctionnelle coïncide avec l'aire au sens élémentaire; il est donc nécessaire de conserver la notation $A[\mathfrak{P}]$ pour désigner l'aire au sens élémentaire de la surface simple polyédrique $\mathfrak{P}$. Nous verrons plus loin que $L[\mathfrak{P}] = A[\mathfrak{P}]$ pour toute surface simple polyédrique $\mathfrak{P}$; remarquons cependant que du point de vue purement mathématique la définition de la fonctionnelle $L[S]$ serait irréprochable même si ce théorème était en défaut.

3. Rappelons que M. Lebesgue a formulé sa définition pour des surfaces plus générales que les surfaces simples, savoir pour les *surfaces continues*. On conçoit que dans le champ plus vaste des surfaces continues on verra surgir de nouvelles difficultés Il y a lieu d'insister sur le caractére de ces difficultés. Une surface continue S est déterminée par un système d'équations $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, où φ, ψ, χ désignent des fonctions uniformes et continues dans le carré $Q: 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1$ (pour fixer les idées). On ne suppose plus que ces équations fassent correspondre à deux points distincts de Q deux points distincts (x, y, z). Une surface continue peut donc avoir des points multiples; s'il s'agit d'une surface polyédrique, les diverses faces triangulaires peuvent s'entrecouper. Soit E_S l'ensemble, dans l'espace xyz, constitué par les points (x, y, z) pour lesquels les équations $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$ ont au moins une solution (u, v) dans le carré Q. Cet ensemble E_S est univoquement déterminé si la surface continue S est donnée, mais il est évident que la surface continue S n'est pas déterminée par l'ensemble E_S. Pour les surfaces continues données par les systèmes d'équations

$$S_1: x = \frac{u}{2}, y = v, z = 0; \quad S_2: x = 2\left(u - \frac{1}{2}\right)^2, y = v, z = 0,$$
$$(0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1),$$

les ensembles E_{S_1}, E_{S_2} coïncident tous deux avec le rectangle $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, $0 \leqq y \leqq 1$, $z = 0$, mais l'on ne saurait considérer comme identiques ces surfaces S_1, S_2. D'ailleurs, il est clair que l'on doit attribuer aux aires de S_1, S_2 des valeurs différentes, $1/2$ pour S_1 et 1 pour S_2. On voit donc que pour évaluer l'aire d'une surface continue S il ne suffit pas de connaître l'ensemble E_S de ses points.

Soit S une surface continue donnée par les équations $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $z=\chi(u,v)$. Soit d'autre part $\{S_n\}$ une suite de surfaces continues, S_n étant donnée par des équations $x=\varphi_n(u,v)$, $y=\psi_n(u,v)$, $z=\chi_n(u,v)$. Dans le cas où $\varphi_n\to\varphi$, $\psi_n\to\psi$, $\chi_n\to\chi$ uniformément dans le carré Q, nous dirons que la suite $\{S_n\}$ tend vers S. Soit en particulier $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces continues polyédriques tendant vers S; en désignant de nouveau par $A[\mathfrak{P}_n]$ l'aire au sens élémentaire de $\mathfrak{P}_n$, $\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n]$ sera une quantité déterminée. La limite inférieure des quantités $\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n]$, correspondant aux diverses suites $\{\mathfrak{P}_n\}$, est considérée par M. LEBESGUE comme l'aire de la surface continue S. Désignons cette quantité, pour la distinguer de la fonctionnelle $L[S]$, définie précédemment dans le champ des surfaces simples, par $L_*[S]$. En remplacant, dans la définition de $L_*[S]$, surface continue par surface simple, surface continue polyédrique par surface simple polyédrique, on retombe sur la fonctionnelle $L[S]$.

Il a été observé plus haut que la connaissance de l'ensemble des points d'une surface continue ne suffit pas pour évaluer son aire. GEÖCZE fit la remarque curieuse qu'en adoptant $L_*[S]$ comme définition de l'aire, il y a des surfaces continues dont l'aire est égale à zéro et qui remplissent un cube[3]). Pour arriver à son exemple, considérons une surface continue S et construisons de la façon suivante une suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ de surfaces continues polyédriques tendant vers S. Décomposons le carré Q en n^2 petits carrés congruents, et décomposons, en tracant des diagonales, chacun de ces petits carrés en deux triangles. Soient A, B, C les sommets d'un tel triangle, et soient A^*, B^*, C^* les points correspondants de la surface S. Les triangles $A^*B^*C^*$ ainsi obtenus forment dans l'espace $x\,y\,z$ une surface continue polyédrique $\mathfrak{P}_n$, inscrite dans S; à cause de la continuité des fonctions φ, ψ, χ, figurant dans les équations qui définissent S, on peut évidemment représenter $\mathfrak{P}_n$ par des équations $x=\varphi_n(u,v)$, $y=\psi_n(u,v)$, $z=\chi_n(u,v)$, où $\varphi_n\to\varphi$, $\psi_n\to\psi$, $\chi_n\to\chi$ uniformément dans le carré Q. Donc $\mathfrak{P}_n$ tend vers S. Par conséquent $L_*[S]$ sera égale à zéro si l'aire au sens élémentaire de $\mathfrak{P}_n$ tend vers 0. GEÖCZE observe que c'est certainement le cas si les fonctions

[3]) Z. de GEÖCZE, Sur l'exemple d'une surface dont l'aire est égale à zéro et qui remplit un cube, *Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France,* 1913, pp. 29—31; voir aussi H. LEBESGUE, Observations sur la communication précédente, *ibid.* pp. 31—32.

φ, ψ, χ sont indépendantes de $v: \varphi = \varphi(u)$, $\psi = \psi(u)$, $\chi = \chi(u)$, car alors chacun des triangles $A^* B^* C^*$ décrits plus haut a deux de ses sommets réunis en un même point, de sorte que l'aire élémentaire de $\mathfrak{P}_n$ est égale à zéro. Or, on peut choisir les fonctions continues $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ de sorte que la courbe continue $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$, $z = \chi(u)$ remplisse un cube (*courbe de* Peano); on obtient ainsi l'exemple annoncé.

Cet exemple n'est pas en contradiction avec l'intuition géométrique, puisqu'il n'a guère de sens de parler de la notion intuitive de l'aire d'une surface continue générale. Tout de même, on est conduit à formuler quelques observations concernant la fonctionnelle $L_*[S]$. Soit S la surface de Geöcze décrite plus haut, et soit **p** un plan quelconque. La projection orthogonale de S sur **p** est un domaine polygonal dont l'aire surpasse $\frac{a^2 \pi}{4}$, où a désigne le côté du cube rempli par S; en effet, ce cube contient une sphère de rayon $\frac{a}{2}$, de sorte que la projection contiendra un cercle de même rayon. L'aire $L_*[S]$ de S étant égale à zéro, on voit donc que dans le champ des surfaces continues il n'est pas vrai en général que l'aire d'une surface est au moins égale à l'aire de l'une quelconque de ses projections orthogonales, tandis que cette propriété constitue l'un des attributs les plus évidents de l'*aire intuitive*. Ceci ressort clairement du fait que la propriété en question est à la base de presque toutes les définitions de l'aire. Pour formuler une seconde observation, rappelons le fait intuitif suivant, relatif à la longueur des courbes. Si un point mobile décrit un intervalle de longueur l, en repassant plusieurs fois par la même position, la longueur du chemin parcouru sera au moins égale à l; en d'autres termes, la longueur d'une courbe continue, contenant tous les points d'un intervalle de longueur l, est au moins égale à l. Il y a donc lieu d'exiger que l'aire d'une surface continue, contenant tous les points d'un carré de côté a, soit au moins égale à a^2; or, cela n'est pas vrai en général si l'on définit l'aire par $L_*[S]$. Pour le voir, il suffit de modifier la construction de Geöcze de manière à obtenir une surface continue S pour laquelle $L_*[S]$ est égale à zéro et qui remplit un carré au lieu d'un cube.

De tout ceci il résulte que la fonctionnelle $L_*[S]$ n'obéit pas dans son champ de définition aux mêmes lois que d'aire intuitive dans le champ des surfaces familières. Il y a donc lieu de restreindre d'abord la généralité des surfaces étudiées; c'est ce que nous avons fait dès le début en ne définissant l'aire que dans le champ des surfaces simples.[4])

4. Pour éclairer la conception de la fonctionnelle $L[S]$, introduite au n° 2, nous allons indiquer quelques conséquences immédiates de la définition. Soit S une surface simple et $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S. On aura par définition

$$\underline{\lim}\ A[\mathfrak{P}_n] \geqq L[S].$$

Montrons qu'il est possible de choisir la suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ de sorte que

$$\lim A[\mathfrak{P}_n] = L[S],$$

c'est-à-dire de sorte que $A[\mathfrak{P}_n]$ tende vers la plus petite limite possible. Soit $\{\varepsilon_\nu\}$ une suite de nombres non-négatifs tendant vers zéro. D'après la définition de $L[S]$, il existe une suite $\{\mathfrak{P}_n^{(\nu)}\}$ de surfaces simples polyédriques tendant vers S, telle que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\ A[\mathfrak{P}_n^{(\nu)}] < L[S] + \varepsilon_\nu.$$

Cette suite contient donc un élément $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ dont l'écart de S est inférieur à ε_ν et qui satisfait en outre à l'inégalité

$$A[\mathfrak{P}^{(\nu)}] < L[S] + \varepsilon_\nu.$$

La suite $\{\mathfrak{P}^{(\nu)}\}$, ainsi obtenue, tend vers S et l'inégalité précédente montre que

$$\overline{\lim}_{\nu\to\infty}\ A[\mathfrak{P}^{(\nu)}] \leqq L[S].$$

D'ailleurs, par définition,

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty}\ A[\mathfrak{P}^{(\nu)}] \geqq L[S],$$

donc, puisque la limite inférieure ne saurait dépasser la limite supérieure,

$$\overline{\lim}\ A[\mathfrak{P}^{(\nu)}] = \underline{\lim}\ A[\mathfrak{P}^{(\nu)}] = L[S]$$

Donc, la suite $\{A[\mathfrak{P}^{(\nu)}]\}$ est convergente et tend vers $L[S]$.

Les propriétés que nous venons d'indiquer déterminent la fonctionnelle $L[S]$. D'une manière précise soit $L^*[S]$ une fonctionnelle définie dans le champ des surfaces simples et jouissant des propriétés suivantes:

[4]) Geöcze a démontré le théorème important que pour les surfaces simples l'aire $L_*[S]$, donc a fortiori l'aire $L[S]$, est toujours supérieure à zéro (Sur la théorie de la quadrature (en hongrois), *Mathematikai és természettudományi értesítő* **31**, 1913, pp. 306—318).

a) On a pour toute suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ tendant vers la surface simple S
$$\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n] \geqq L^*[S].$$

b) Il existe des suites $\{\mathfrak{P}_n\}$, tendant vers S, pour lesquelles
$$\lim A[\mathfrak{P}_n] = L^*[S].$$
Dans ces conditions, on a identiquement $L[S] = L^*[S]$. La démonstration est immédiate. En effet, en tenant compte de la définition de $L[S]$, la propriété *a)* de $L^*[S]$ montre d'abord que $L^*[S] \leqq L[S]$, tandis que la propriété *b)* de $L^*[S]$ fournit l'inégalité inverse.

On se rend maintenant aisément compte des réflexions qui ont conduit M. LEBESGUE à sa définition de l'aire. D'abord, la propriété *b)* exprime une hypothèse fondamentale: l'aire d'une surface courbe peut être calculée à l'aide de polyèdres d'approximation convenablement choisis. D'autre part, on sait depuis l'exemple célèbre donné par H. A. SCHWARZ que les polyèdres inscrits ne jouent pas le même rôle distingué dans la théorie de l'aire que les polygones inscrits dans la théorie de la longueur; l'analyse de cet exemple conduit en outre à une observation importante, résumée et généralisée dans l'énoncé de la propriété *a)*. On vérifie d'ailleurs facilement que la longueur des courbes jouit de propriétés analogues; donc, la longueur des courbes est susceptible d'une définition absolument analogue à celle de l'aire $L[S]$.[5])

5. La fonctionnelle $L[S]$ possède la propriété fondamentale d'être *semi-continue inférieurement;* cela signifie que l'on a, pour toute suite $\{S_n\}$ de surfaces simples tendant vers une surface simple S
$$\underline{\lim}\, L[S_n] \geqq L[S] \text{ [6])}$$
Pour démontrer cette propriété, prenons une suite $\{\varepsilon_n\}$ de nombres positifs tendant vers zéro, et soit $\mathfrak{P}_n$ une surface simple polyédrique telle que l'écart de $\mathfrak{P}_n$ et de S_n soit inférieur à ε_n et que l'on ait de plus
$$A[\mathfrak{P}_n] < L[S_n] + \varepsilon_n, \qquad (1)$$
d'après la définition de $L[S_n]$, un tel choix de $\mathfrak{P}_n$ est toujours possible. Ces polyèdres $\mathfrak{P}_n$ tendent, à cause de $\varepsilon_n \to 0$, vers S; par conséquent, en vertu de la définition même de $L[S]$,

---

[5]) M. H. LEBESGUE a exposé récemment la suite des idées qui l'ont conduit à sa définition de l'aire (Quelques remarques sur la définition de l'aire des surfaces, *Fundamenta Mathematicae,* t. VIII, 1926, pp. 160—165).

[6]) H. LEBESGUE, l. c. [1]).

$$\underline{\lim}\ A[\mathfrak{P}_n] \geqq L[S]. \tag{2}$$

D'autre part, il résulte de la relation (1) que

$$\underline{\lim}\ A[\mathfrak{P}_n] \leqq \underline{\lim}\ L[S_n]; \tag{3}$$

on aura donc, en vertu de (2), (3),

$$\underline{\lim}\ L[S_n] \geqq L[S], \tag{3'}$$

et la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle $L[S]$ est démontrée. En voilà un corollaire immédiat qui nous sera très utile plus loin. *Soit* $\{S_n\}$ *une suite de surfaces simples tendant vers la surface simple S, et telles que* $L[S_n] \leqq L[S]$. *Dans ces conditions, on aura* $L[S_n] \to L[S]$. En effet, de l'hypothèse $L[S_n] \leqq L[S]$ il résulte

$$\overline{\lim}\ L[S_n] \leqq L[S];$$

en comparant cette inégalité à (3'), on obtient la proposition énoncée.

L'utilité de cette proposition pour le calcul de l'aire $L[S]$ est évidente. On cherchera à déterminer une suite $\{S_n\}$ tendant vers la surface proposée S et jouissant des propriétés suivantes:

α) Les S_n appartiennent à une classe de surfaces dont on sait déjà calculer l'aire.

β) On a $\qquad L[S_n] \leqq L[S].$

En vertu de la proposition précédente, on aura dans ces conditions $L[S_n] \to L[S]$, et l'aire $L[S]$ se trouve ainsi représentée comme la limite d'une suite convergente de quantités connues. Pour appliquer cette méthode, il faut savoir construire des *surfaces d'approximation dont les aires soient inférieures à l'aire de la surface proposée.* L'intuition géométrique apprend que l'on diminue l'aire d'une surface en rendant son allure plus uniforme; cette observation pratique, jointe aux remarques précédentes, nous permettra d'établir, au § 3, d'une manière très simple certaines formules générales pour l'aire.

6. D'après la définition de l'aire $L[S]$, il existe une suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ de surfaces simples polyédriques dont les aires élémentaires tendent vers $L[S]$; mais pour obtenir une telle suite, il n'est ni nécessaire ni suffisant de choisir $\mathfrak{P}_n$ parmi les polyèdres *inscrits* dans la surface proposée.[7]) Ajoutons que l'on ne connaît pas la

[7]) C'est ce qui ressort de l'exemple donné par H. A. Schwarz (Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe, Gesammelte mathematische Abhandlungen 2, pp. 309—311). Cf. aussi M. Fréchet, Sur l'aire des surfaces polyédrales, *Annales de la Société Polonaise de Mathématique,* t. III, 1925, pp. 1—3.

construction générale d'une suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ telle que $A[\mathfrak{P}_n] \to L[S]$ Il est cependant évident que ce problème, appelé par Geöcze *problème de la quadrature*,[8]) serait résolu si l'on pouvait construire la suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ de manière que les aires élémentaires $A[\mathfrak{P}_n]$ soient inférieures à $L[S]$. En effet, pour une telle suite on aurait d'abord

$$\overline{\lim}\ A[\mathfrak{P}_n] \leqq L[S],$$

d'autre part, en vertu de la définition de $L[S]$,

$$\underline{\lim}\ A[\mathfrak{P}_n] \geqq L[S],$$

donc $\lim A[\mathfrak{P}_n] = L[S]$. Cette remarque explique aussi pourquoi les polyèdres inscrits ne jouent pas le même rôle dans la théorie de l'aire que les polygones inscrits dans la théorie de la longueur. Toute ligne polygonale inscrite dans une courbe a une longueur au plus égale à la longueur de la courbe, tandis que la propriété analogue ne subsiste pas en général dans le cas des surfaces. La propriété essentielle d'une ligne polygonale inscrite dans une courbe ne consiste donc pas à avoir ses sommets situés sur la courbe, mais à avoir une longueur inférieure à la longueur de celle-ci. Cette observation conduit à présenter la définition de l'aire $L[S]$ de la manière suivante.

Soit ε un nombre positif et soit $\{\mathfrak{P}\}_\varepsilon$ l'ensemble des surfaces simples polyédriques dont l'écart de la surface proposée S ne dépasse pas ε. Si, à l'aide de quelque loi simple, on pourrait indiquer dans $\{\mathfrak{P}\}_\varepsilon$ un polyèdre $\mathfrak{P}$ dont l'aire élémentaire $A[\mathfrak{P}]$ soit inférieure à l'aire de S, on prendrait $A[\mathfrak{P}]$ comme valeur approchée de l'aire de S. À défaut d'une telle loi, le mieux que l'on puisse faire consiste donc à considérer, comme valeur approchée de l'aire de S, la limite inférieure de $A[\mathfrak{P}]$ pour l'ensemble $\{\mathfrak{P}\}_\varepsilon$. En désignant cette limite inférieure par $M[S;\varepsilon]$, on a évidemment

$$M[S;\varepsilon'] \geqq M[S;\varepsilon''] \text{ pour } \varepsilon' \leqq \varepsilon'',$$

de sorte que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M[S;\varepsilon]$$

existe. Soit $M[S]$ cette limite; les considérations précédentes conduisent à définir $M[S]$ comme aire de S. On montre facilement

[8]) Z. de Geöcze, Quadrature des surfaces courbes, Thèse, Paris, 1908 (publiée aux *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, **26**, 1910, pp. 1—88).

que cette définition est équivalente à celle de M. LEBESGUE.[9]) Soit en effet $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S, et soit ε_n l'écart de $\mathfrak{P}_n$ et de S. On aura par définition $M[S;\varepsilon_n] \leqq A[\mathfrak{P}_n]$, d'où, pour $n \to \infty$,

$$M[S] \leqq \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n].$$

Cette inégalité étant vérifiée pour toute suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ tendant vers S, il vient $M[S] \leqq L[S]$. Pour démontrer l'inégalité inverse, soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro. Par la définition de $M[S;\varepsilon_n]$, il existe une surface simple polyédrique $\mathfrak{P}_n$ dont l'écart de S ne dépasse pas ε_n et pour laquelle $M[S;\varepsilon_n] > A[\mathfrak{P}_n] - {}^1/n$. On a donc, pour $n \to \infty$,

$$M[S] \geqq \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n].$$

D'ailleurs, puisque $\mathfrak{P}_n \to S$,

$$\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n] \geqq L[S],$$

donc $M[S] \geqq L[S]$.

7. M. FRÉCHET fit observer[10]) que l'on peut arriver à la définition de l'aire au sens de M. LEBESGUE en cherchant à *prolonger la fonctionnelle* $A[\mathfrak{P}]$, c'est-à-dire en cherchant à définir, dans le champ des surfaces simples, une fonctionnelle égale à l'aire élémentaire pour les surfaces polyédriques et jouissant dans tout son champ de définition de quelque propriété caractéristique de l'aire élémentaire $A[\mathfrak{P}]$. En considérant comme propriété caractéristique la semi-continuité inférieure, on est conduit à chercher une fonctionnelle $F[S]$ jouissant des propriétés suivantes.

α) $F[S]$ est définie dans le champ des surfaces simples.

β) Pour toute surface simple polyédrique, F est égale à l'aire élémentaire.

γ) $F[S]$ est semi-continue inférieurement.

Ces conditions ne suffisent pas encore pour déterminer $F[S]$; en effet, si $F[S]$ satisfait à ces conditions, et si S_0 est une surface simple déterminée non-polyédrique, on obtient une fonctionnelle

[9]) Il s'agit évidemment du fait, observé par M. LEBESGUE dans sa Thèse, qu'en vertu de sa qualité de fonctionnelle semi-continue inférieurement l'aire est égale à son minimum local. Une petite discussion est cependant nécessaire, puisque nous ne savons pas encore que pour les surfaces polyédriques l'aire L coïncide avec l'aire élémentaire.

[10]) M. FRÉCHET, Sur le prolongement des fonctionnelles semi-continues et sur l'aire des surfaces courbes, *Fundamenta Mathematicae*, t. VII, pp. 210—224.

$F^*[S]$ jouissant de ces mêmes propriétés et différente de $F[S]$ en posant par exemple

$$F^*[S]=F[S] \text{ pour } S \neq S_0,\ F^*[S_0]=F[S_0]-1.$$

M. Fréchet ajoute donc une quatrième condition, savoir que $F[S]$ soit aussi peu discontinue que possible; cette condition peut être remplacée par la suivante:

δ) Pour toute surface simple S, il existe une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S, dont les aires élémentaires tendent vers $F[S]$.

Les quatre conditions $\alpha)-\delta)$ sont caractéristiques. D'une manière précise: deux fonctionnelles F, F^* jouissant des propriétés $\alpha)-\delta)$ sont identiques. En effet, soit $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers la surface simple S, pour laquelle

$$\lim A[\mathfrak{P}_n]=F^*[S];$$

une telle suite existe bien en vertu de δ). La relation précédente s'écrit, par égard à β),

$$\lim F[\mathfrak{P}_n]=F^*[S].$$

D'autre part, en vertu de γ),

$$\underline{\lim}\, F[\mathfrak{P}_n] \geqq F[S],$$

donc $F^*[S] \geqq F[S]$. L'inégalité inverse se démontre de la même façon; on a donc $F \equiv F^*$.

Les conditions $\alpha)-\delta)$ définissent donc d'une manière univoque une fonctionnelle; on arrive ainsi à une *définition descriptive de l'aire.* Bien entendu, il faut démontrer que les conditions $\alpha)-\delta)$ sont compatibles. M. Fréchet suppose donc que l'on ait déjà prouvé que l'aire élémentaire est une fonctionnelle semi-continue inférieurement dans le champ des surfaces polyédriques.[11]) La compatibilité des conditions $\alpha)-\delta)$ résulte aussi du fait, équivalent au théorème élémentaire mentionné, que la fonctionnelle $L[S]$ coïncide, pour les surfaces polyédriques, avec l'aire élémentaire. Nous obtiendrons ce résultat, comme corollaire de considérations plus générales, au § 2. L'aire $L[S]$ satisfait donc aux quatre conditions $\alpha)-\delta)$, et c'est la seule fonctionnelle qui y satisfasse.

8. Nous terminons ce chapitre par la proposition suivante qui montre que *l'aire $L[S]$ a le caractère d'une mesure intérieure.*

---

[11]) M. Fréchet a fourni une démonstration directe de ce fait élémentaire; voir: La semi-continuité en géométrie élémentaire, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. III, 1924.

Soient S_1, S_2 deux surfaces simples sans points communs intérieurs, situées sur une troisième surface simple S; on aura

$$L[S_1]+L[S_2]\leqq L[S].$$

Pour le montrer, soit $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S et telles que

$$A[\mathfrak{P}_n]\to L[S]. \tag{3''}$$

Puisque $\mathfrak{P}_n$ tend vers S, il existe une transformation topologique T_n de S en $\mathfrak{P}_n$, telle que

$$\|T_n\|<\varepsilon_n, \text{ avec } \varepsilon_n\to 0.$$

Soient $S_1^{(n)}$, $S_2^{(n)}$ les images de S_1, S_2 par T_n. Considérons par ex. $S_1^{(n)}$. Puisque $S_1^{(n)}$ est située sur une surface simple polyédrique, on peut construire sur $S_1^{(n)}$ une ligne polygonale simple et fermée $\mathfrak{p}_1^{(n)}$, délimitant sur $S_1^{(n)}$ un domaine $D_1^{(n)}$, tel que $D_1^{(n)}+\mathfrak{p}_1^{(n)}$ est une surface simple polyédrique $\mathfrak{P}_1^{(n)}$ dont l'écart de $S_1^{(n)}$ est moindre que ε_n.[12]) Il existe de même une surface simple polyédrique $\mathfrak{P}_2^{(n)}$, située sur $S_2^{(n)}$, dont l'écart de $S_2^{(n)}$ est moindre que ε_n Puisque $\mathfrak{P}_1^{(n)}$ et $\mathfrak{P}_2^{(n)}$ n'ont pas de points communs intérieurs, on a

$$A[\mathfrak{P}_1^{(n)}]+A[\mathfrak{P}_2^{(n)}]\leqq A[\mathfrak{P}_n] \tag{4}$$

D'autre part, puisque d'après la construction $\mathfrak{P}_1^{(n)}\to S_1$, $\mathfrak{P}_2^{(n)}\to S_2$, on aura

$$\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_1^{(n)}]\geqq L[S_1],\ \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_2^{(n)}]\geqq L[S_2],$$

d'où, en tenant compte de (3'') et de (4),

$$L[S_1]+L[S_2]\leqq \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_1^{(n)}]+\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_2^{(n)}]\leqq$$
$$\leqq \underline{\lim}\,(A[\mathfrak{P}_1^{(n)}]+A[\mathfrak{P}_2^{(n)}])\leqq \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n]=L[S].$$

Plus généralement, si sur une surface simple S on considère un nombre quelconque de surfaces simples $S_1, S_2, \ldots, S_k$ sans points communs intérieurs, on aura

$$L[S_1]+\ldots+L[S_k]\leqq L[S];$$

la démonstration est la même que pour $k=2$.

Considérons en particulier une décomposition d'une surface simple S par un arc simple en deux surfaces simples S_1, S_2. L'inégalité

$$L[S_1]+L[S_2]\leqq L[S]$$

montre que l'aire L est une *mesure intérieure*. Rappelons que plusieurs d'entre les autres définitions de l'aire conduisent à des

---

[12]) Ce fait résulte facilement des développements dans le livre de M. B. de Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie I, zweiter Abschnitt, § 2.

fonctionnelles satisfaisant à l'inégalité inverse[13]); en désignant par $F[S_1]$, $F[S_2]$, $F[S]$ les aires de S_1, S_2, S au sens d'une telle définition, on a

$$F[S_1]+F[S_2]\geqq F[S]$$

Il en résulte que si les fonctionnelles L et F fournissent les mêmes valeurs pour les aires de S_1, S_2, S, on aura

$$L[S_1]+L[S_2]=L[S]$$

Mais il est aisé de voir, par ex. dans le cas où tous les points de S sont situés dans un même plan (cf. § 2, n° 5), que cette relation n'est pas vérifiée en général. Par conséquent, les fonctionnelles L et F ne peuvent coïncider que pour certaines classes particulières de surfaces simples. On voit aussi que la recherche de ces classes de surfaces est liée à l'étude de l'additivité de la fonctionnelle L.

§ 2. Théorèmes sur la projection orthogonale.

1. Soit $\varDelta$ un triangle et $\varDelta'$ la projection orthogonale de $\varDelta$ sur un plan **p**. En désignant les aires élémentaires des triangles $\varDelta$, $\varDelta'$ par les mêmes lettres, on a $\varDelta'=\varDelta\cos\theta$, où θ est l'angle aigu formé par les plans de $\varDelta$ et de $\varDelta'$. Il en résulte d'abord

$$\varDelta'\leqq\varDelta; \tag{5}$$

puis, en désignant par $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ trois plans formant un trièdre orthogonal, et par $\varDelta', \varDelta'', \varDelta'''$ les projections de $\varDelta$ sur ces plans,

$$\varDelta=\left((\varDelta')^2+(\varDelta'')^2+(\varDelta''')^2\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Soit maintenant $\mathfrak{P}$ une surface simple polyédrique, et soient $\varDelta_1$, $\varDelta_2, \ldots, \varDelta_k$ les faces triangulaires de $\mathfrak{P}$. Désignons de nouveau par $\varDelta'_1, \ldots, \varDelta'_k$ les projections orthogonales de ces triangles sur le plan **p**, et par $\mathfrak{P}'$ la projection orthogonale de $\mathfrak{P}$ sur le même plan. D'une manière précise, $\mathfrak{P}'$ est l'ensemble des points du plan **p** qui sont projection orthogonale d'au moins un point de $\mathfrak{P}$. $\mathfrak{P}'$ est un ensemble fermé, évidemment mesurable, même au sens de JORDAN. Soit $m\mathfrak{P}'$ la mesure de $\mathfrak{P}'$, $A[\mathfrak{P}]$ l'aire élémentaire de $\mathfrak{P}$. On aura l'inégalité

$$m\mathfrak{P}'\leqq A[\mathfrak{P}]; \tag{7}$$

---

13) Cf. ZORETTI-ROSENTHAL, Die Punktmengen, Enzyklopädie der math. Wissenschaften IIC9a, en particulier pp. 990—1001. — Voir aussi I. P. SCHAUDER, The theory of surface measure, *Fundamenta Mathematicae* t. VIII, 1926, pp. 1—48.

en effet, tout point de $\mathfrak{P}'$ est contenu dans l'un au moins des triangles fermés $\varDelta_1', \ldots, \varDelta_k'$, de sorte que, en vertu de (5),

$$m\mathfrak{P}' \leqq \varDelta_1' + \ldots + \varDelta_k' \leqq \varDelta_1 + \ldots + \varDelta_k = A[\mathfrak{P}].$$

On obtient une seconde inégalité de ce genre en considérant trois plans $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ formant un trièdre orthogonal. En employant les notations précédentes, on aura d'abord

$$m\mathfrak{P}' \leqq \varDelta_1' + \ldots + \varDelta_k', \quad m\mathfrak{P}'' \leqq \varDelta_1'' + \ldots + \varDelta_k'', \quad m\mathfrak{P}''' \leqq \varDelta_1''' + \ldots + \varDelta_k''' \tag{8}$$

Rappelons maintenant l'inégalité élémentaire, fondamentale pour tous les développements suivants,

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{k} c_i\right)^2\right]^{1/2} \leqq \sum_{i=1}^{k} (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2)^{1/2}. \tag{9}$$

Cette inégalité, dans laquelle a_i, b_i, c_i sont des quantités réelles quelconques, exprime, pour l'espace à trois dimensions, le fait que la longueur du vecteur résultant est au plus égale à la somme des longueurs des vecteurs composants. En y faisant $a_i = \varDelta_i'$, $b_i = \varDelta_i''$, $c_i = \varDelta_i'''$, il vient de (8)

$$[(m\mathfrak{P}')^2 + (m\mathfrak{P}'')^2 + (m\mathfrak{P}''')^2]^{1/2} \leqq \sum_{i=1}^{k} \left((\varDelta_i')^2 + (\varDelta_i'')^2 + (\varDelta_i''')^2\right)^{1/2}.$$

Or, en tenant compte de (6), le second membre est égal à

$$\sum_{i=1}^{k} \varDelta_i = A[\mathfrak{P}];$$

par conséquent

$$[(m\mathfrak{P}')^2 + (m\mathfrak{P}'')^2 + (m\mathfrak{P}''')^2]^{1/2} \leqq A[\mathfrak{P}]. \tag{10}$$

2. Considérons à présent une surface simple S, et soit S' la projection orthogonale de S sur un plan $\mathbf{p}$. Cet ensemble S' est fermé, donc mesurable; en désignant sa mesure par mS', on constate aisément que l'inégalité $mS' \leqq L[S]$, qui correspondrait à l'inégalité élémentaire (7), n'est pas vérifiée en général. Soit par exemple C une courbe simple et fermée dans le plan $\mathbf{p}$, D le domaine intérieur à C, et $S = D + C$. Nous verrons plus loin que dans ce cas $L[S]$ est égale à la mesure de D; d'autre part, puisque dans le cas actuel $S' \equiv S = D + C$, mS' est égale à la mesure de $D + C$ Donc, la courbe C étant générale, on aura $mS' > L[S]$. Dans le cas que nous venons de considérer, il suffirait de négliger les points frontières de la projection orthogonale S' pour obtenir un ensemble dont la mesure fournit une borne inférieure pour l'aire $L[S]$. On voit aisément que cette remarque ne s'étend point aux surfaces simples quelconques; tout de même; elle indique la voie à suivre. Pour obtenir, à l'aide de projections orthogonales, des bornes inférieures pour l'aire $L[S]$, il faudra négliger certains points de la projection orthogonale S'. La difficulté consiste à caractériser ceux des points de S' que l'on peut conserver sans risquer d'obtenir un ensemble dont la mesure ne fournit plus une borne inférieure pour l'aire.

Ces observations conduisent à des problèmes de nature topologique dont l'étude approfondie serait d'une importance considérable pour la théorie de l'aire. Dans cet ordre d'idées, GEÖCZE a obtenu des résultats importants[14]) à l'aide d'un raisonnement simple et général que nous allons d'abord exposer d'une manière précise. À cet effet, il est utile d'introduire la notion du *noyau de la projection orthogonale d'une surface simple S Le noyau de la projection orthogonale S de la surface simple S sur le plan* **p** *est constitué par les points P jouissant de la propriété suivante: il existe un nombre positif $\delta = \delta(P)$, dépendant du point P, de sorte que P est contenu dans la projection orthogonale de toute surface simple S^* dont l'écart de S est inférieur à δ.* Pour ne pas devoir discuter la mesurabilité du noyau, nous considérons seulement l'ensemble de ses points intérieurs, le *noyau restreint.* C'est un ensemble ouvert (ou vide) et par conséquent mesurable. Nous allons montrer que les inégalités élémentaires (7) et (10) se généralisent aux surfaces simples quelconques, à condition de remplacer les projections orthogonales par les noyaux restreints.

Intercalons ici une remarque qui nous sera utile plus tard. Soient S_1, S_2 deux surfaces simples, et supposons que S_1 soit sous-ensemble de S_2. Désignons par N_1, N_2 les noyaux restreints des projections orthogonales de S_1, S_2 sur un même plan **p**. *Alors N_1 est sous-ensemble de N_2.* Pour le voir, il suffit évidemment de prouver: si P_1 est un point de N_1, et $\{S_n^{(2)}\}$ une suite quelconque de surfaces simples tendant vers S_2, le point P_1 est contenu pour n assez grand dans la projection orthogonale de $S_n^{(2)}$ sur **p**. Puisque $S_n^{(2)} \to S_2$, on peut indiquer, pour $n = 1, 2, \ldots$, une transformation topologique T_n entre $S_n^{(2)}$ et S_2, de sorte que $\|T_n\| \to 0$. La surface S_1 étant sous-ensemble de S_2, T_n fait correspondre à S_1 une surface simple $S_n^{(1)}$, sous-ensemble de $S_n^{(2)}$. À cause de $\|T_n\| \to 0$, on

[14]) Cf. en particulier ses travaux: Recherches générales sur la quadrature des surfaces courbes, *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn* **27**, 1909, pp. 1—21 et 131—163.

a $S_n^{(1)} \to S_1$; par conséquent, en vertu de la définition du noyau, le point P_1 sera contenu, pour n assez grand, dans la projection orthogonale de $S_n^{(1)}$ sur **p**, donc a fortiori dans celle de $S_n^{(2)}$, puisque $S_n^{(1)}$ est sous-ensemble de $S_n^{(2)}$.

3. Soit N le noyau restreint de la projection orthogonale d'une surface simple S sur le plan **p**. Nous allons démontrer l'inégalité

$$mN \leqq L[S] \tag{11}$$

généralisant l'inégalité élémentaire (7). Soit $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S et soit $\mathfrak{P}'_n$ la projection orthogonale de $\mathfrak{P}_n$ sur le plan **p**. Puisque $\mathfrak{P}_n$ tend vers S, il résulte de la détinition du noyau restreint que tout point de N est contenu, pour n assez grand, dans $\mathfrak{P}'_n$. En désignant par H_n le produit des ensembles mesurables $\mathfrak{P}'_n$ et N, H_n est un sous-ensemble mesurable de N et tout point de N est contenu dans H_n pour n assez grand. Il en résulte, en vertu des premiers théorèmes sur la mesure, que $mH_n \to mN$. D'autre part, H_n étant sous-ensemble de $\mathfrak{P}'_n$, $mH_n \leqq m\mathfrak{P}'_n$. L'inégalité élémentaire (7) fournit $m\mathfrak{P}'_n \leqq A[\mathfrak{P}_n]$. En combinant les relations précédentes, il vient

$$mN \leqq \underline{\lim}\ A[\mathfrak{P}_n].$$

Cette inégalité étant vérifiée pour toute suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ tendant vers S, on en déduit, en vertu de la définition de l'aire L, la relation (11).

Considérons en second lieu trois plans $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ formant un trièdre rectangulaire, et soient N_1, N_2, N_3 les noyaux restreints des projections orthogonales de S sur ces plans. Nous établirons l'inégalité, généralisation de l'inégalité élémentaire (10),

$$[(mN_1)^2+(mN_2)^2+(mN_3)^2]^{1/2} \leqq L[S] \tag{12}$$

Soit de nouveau $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S et soient $\mathfrak{P}'_n, \mathfrak{P}''_n, \mathfrak{P}'''_n$ les projections orthogonales de $\mathfrak{P}_n$ sur les plans $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$. On obtient d'abord comme précedemment les inégalités

$$mN_1 \leqq \underline{\lim}\ m\mathfrak{P}'_n,\quad mN_2 \leqq \underline{\lim}\ m\mathfrak{P}''_n,\quad mN_3 \leqq \underline{\lim}\ m\mathfrak{P}'''_n.$$

Il en résulte

$$[(mN_1)^2+(mN_2)^2+(mN_3)^2]^{1/2} \leqq [(\underline{\lim}\ m\mathfrak{P}'_n)^2+(\underline{\lim}\ m\mathfrak{P}''_n)^2+(\underline{\lim}\ m\mathfrak{P}'''_n)^2]^{1/2}$$
$$\leqq \underline{\lim}\ [(m\mathfrak{P}'_n)^2+(m\mathfrak{P}''_n)^2+(m\mathfrak{P}'''_n)^2]^{1/2};$$

donc, en tenant compte de l'inégalité élémentaire (10),

$$[(mN_1)^2+(mN_2)^2+(mN_3)^2]^{1/2} \leqq \underline{\lim}\ A[\mathfrak{P}_n].$$

Cette inégalité étant vérifiée pour toute suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ tendant vers S, on en conclut la relation (12).

4. À l'aide des inégalités (11) et (12), on obtient des bornes inférieures pour l'aire $L[S]$ d'une surface simple quelconque, mais ces bornes inférieures présentent, du point de vue des applications, un caractère hypothétique, à cause des noyaux restreints qui y in erviennent. En effet, il est évident qu'en introduisant les noyaux restreints, nous n'avons effectué qu'une transformation des difficultés signalées au n° 2. Pour arriver à des bornes inférieures pratiquables, une étude approfondie des noyaux restreints serait nécessaire; les bornes obtenues seront d'autant plus précises que l'on connaît mieux les noyaux. À défaut de résultats généraux, nous nous bornerons à indiquer quelques conséquences particulières des inégalités (11) et (12); les bornes inférieures que nous obtiendrons présenteront le caractère particulier de ne dépendre que de la courbe frontière de la surface simple considérée.

Soit C la frontière de la surface simple S; C est une courbe continue simple et fermée. Un point P décrivant C, la projection orthogonale P' de P sur le plan **p** décrira une courbe continue fermée C'; bien entendu, le point P' peut revenir, pendant le parcours, plusieurs fois à la même position. Soit alors O un point du plan **p**, non situé sur la courbe C'; l'argument du vecteur $\overrightarrow{OP'}$ variera d'une façon continue pendant le parcours.[15] La variation, pendant un parcours complet, de l'argument du vecteur $\overrightarrow{OP'}$, divisée par 2π, s'appelle comme on sait *l'indice* du point O par rapport à la courbe continue C'. *Si l'indice du point O par rapport à C' est différent de zéro, nous pouvons affirmer que le point O est contenu dans le noyau restreint de la projection de S sur* **p**.

Pour le voir, soit $\{S_n\}$ une suite de surfaces simples tendant vers S. On aura alors, pour $n = 1, 2, \ldots$, une transformation topologique T_n de S en S_n, de sorte que $\|T_n\| \to 0$. Soit P_n le point de S_n correspondant par la transformation T_n au point P de S. Le point P décrivant la frontière C de S, P_n décrira la frontière C_n de S_n, et la distance PP_n sera au plus égale à $\|T_n\|$, quantité

[15]) Concernant cette notion si importante de la variation de l'argument d'un vecteur, le lecteur trouvera tous les renseignements nécessaires dans le livre de M. Kerékjártó, l. c. [12]).

qui tend vers zéro. En passant aux projections orthogonales, nous voyons que la distance des points P' et P'_n tend uniformément vers zéro pour $n \to 0$. Il en résulte, puisque le point O n'est pas situé sur C', que pour n assez grand O ne sera pas situé sur C'_n, et en second lieu que l'indice de O par rapport à C'_n tend vers l'indice de O par rapport à C', c'est-à-dire vers une quantité qui est différente de zéro par hypothèse. Par conséquent, pour n assez grand l'indice de O par rapport à C'_n sera également différente de zéro. Il en résulte aisément que O est contenu, pour ces valeurs assez grandes de n, dans la projection de S_n. Pour réduire cette assertion à un théorème familier, il est commode d'introduire dans le plan **p** une variable complexe $\zeta = \xi + i\eta$, où ξ, η désignent des coordonnées cartésiennes. La transformation qui fait correspondre à tout point P_n de S_n sa projection P'_n s'exprimera alors par une formule $f_n(P_n) = \zeta$, où $f_n(P_n)$ est une fonction complexe uniforme et continue du point P_n sur S_n. Si ζ_0 est l'affixe du point O, il s'agit évidemment de démontrer que pour n assez grande la fonction $f_n(P_n) - \zeta_0$ s'annule quelque part sur S_n. Or, la variation de l'argument de la fonction $f_n(P_n) - \zeta_0$ sur la frontière C_n de S_n est égale, à un facteur 2π près, à l'indice de O par rapport à C'_n, donc différente de zéro pour n assez grand. Il en résulte que $f_n(P_n) - \zeta_0$ doit s'annuler quelque part sur S_n; en effet, s'il en était autrement, la variation de l'argument de cette fonction sur la frontière de S_n serait égale à zéro, on vertu du *théorème de monodromie.*[16])

Pour n assez grand, le point O est donc contenu dans la projection orthogonale de S_n sur **p**. La suite $\{S_n\}$ étant quelconque, cela démontre que le point O est contenu dans le noyau de la projection orthogonale de S sur **p**. Pour voir que O appartient au noyau restreint, il suffit d'observer que si un point O jouit des propriétés supposées (savoir que O n'est pas situé sur C' et que l'indice de O par rapport à C' est différent de zéro), tout point contenu dans un voisinage suffisamment restreint de O jouit évidemment de ces mêmes propriétés, et appartient par conséquent an noyau. Le point O est donc un point intérieur du noyau; donc, par définition, O est contenu dans le noyau restreint.

5. On obtient un cas particulier important en admettant que la projection C' de la courbe C soit aussi une courbe simple, c'est-à-dire que deux points distincts de C ont pour projections

[16]) Voir l. c. [12]), p. 175.

deux points distincts. En ce cas, l'indice de tout point intérieur à C' est $+1$ ou -1, donc $\neq 0$; par conséquent, tout point intérieur à C' appartient au noyau restreint de la projection de S sur $\mathbf{p}$. Considérons en particulier une surface simple S limitée par une courbe plane simple et fermée C. Soit $\mathbf{p}$ le plan contenant C, et D le domaine intérieur à C. La remarque précédente montre que tout point de D est contenu dans le noyau restreint de la projection orthogonale de S sur $\mathbf{p}$; par conséquent, en vertu de l'inégalité (11), $mD \leqq L[S]$. Cette inégalité correspond au fait intuitif que *toute surface simple limitée par une courbe plane possède une aire au moins égale à l'aire du domaine plan intérieur à cette courbe.*

Reprenons les notations précédentes, en supposant que $S = D + C$, c'est-à-dire que tout point de S soit contenu dans le plan $\mathbf{p}$. Montrons que l'on a dans ce cas $L[S] = mD$, c'est-à-dire que l'aire est égale à la mesure intérieure, au sens de Jordan, de l'ensemble de points $S = D + C$. Pour le voir, nous nous servirons du théorème topologique qu'il existe, à l'intérieur de la courbe C, une suite $\{\mathfrak{p}_n\}$ de lignes polygonales simples et fermées, de sorte qu'en désignant par D_n le domaine intérieur à $\mathfrak{p}_n$, les surfaces simples polyédriques $\mathfrak{P}_n = D_n + \mathfrak{p}_n$ tendent vers $S = D + C$ (cf. [12])). On aura pour l'aire élémentaire des surfaces polyédriques ainsi construites $A[\mathfrak{P}_n] < mD$; d'autre part, nous avons démontré plus haut que $mD \leqq L[S]$. Nous avons donc les inégalités

$$A[\mathfrak{P}_n] < mD \leqq L[S]. \tag{13}$$

Il en résulte, puisque $\mathfrak{P}_n \to S$, la relation $A[\mathfrak{P}_n] \to L[S]$, en vertu d'une remarque faite au début du n° 6, § 1. En faisant maintenant $n \to \infty$ dans (13), on obtient la proposition $mD = L[S]$.

En appliquant ce résultat à une surface simple polyédrique $\mathfrak{P}$ constitué par un seul triangle, il résulte que dans ce cas spécial $L[\mathfrak{P}] = A[\mathfrak{P}]$. Soit maintenant $\mathfrak{P}$ une surface simple polyédrique constitué par plusieurs triangles $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$. En considérant chacun de ces triangles comme une surface simple, nous aurons en vertu de la remarque précédente

$$A[\mathfrak{P}] = A[\Delta_1] + \ldots + A[\Delta_k] = L[\Delta_1] + \ldots + L[\Delta_k].$$

D'autre part (§ 1, n° 8)

$$L[\mathfrak{P}] \geqq L[\Delta_1] + \ldots + L[\Delta_k],$$

donc $L[\mathfrak{P}] \geqq A[\mathfrak{P}]$. L'inégalité inverse est immédiate. Posons en effet $\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{P}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Cette suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ tend vers $\mathfrak{P}$; donc, par définition,

$$L[\mathfrak{P}] \leqq \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n],$$

d'où, puisque $A[\mathfrak{P}_n] = A[\mathfrak{P}]$, il vient $L[\mathfrak{P}] \leqq A[\mathfrak{P}]$. On obtient ainsi le théorème: *pour toute surface simple polyédrique, l'aire L coïncide avec l'aire au sens élémentaire.*

6. Reprenons les notations du n° 4 et introduisons dans le plan **p** des coordonnées cartésiennes ξ, η. Considérons dans le plan **p** un rectangle ouvert défini par des inégalités $\xi_1 < \xi < \xi_2$, $\eta_1 < \eta < \eta_2$; nous allons indiquer un cas où l'on peut affirmer que tout point de ce rectangle est contenu dans le noyau restreint de la projection orthogonale de S sur **p**.

Supposons qu'il soit possible de diviser la courbe C, à l'aide de quatre points distincts, en quatre arcs $l_{\xi_1}, l_{\eta_1}, l_{\xi_2}, l_{\eta_2}$, se succédant dans cet ordre cyclique sur C, de sorte que les projections de ces arcs soient contenues respectivement dans les demi-plans $\xi < \xi_1$, $\eta < \eta_1$, $\xi > \xi_2$, $\eta > \eta_2$. *Dans ces conditions, tout point du rectangle ouvert $\xi_1 < \xi < \xi_2$, $\eta_1 < \eta < \eta_2$ appartient au noyau restreint de la projection de S sur* **p**.[17])

Soit en effet O un point de ce rectangle ouvert. En désignant par P' la projection orthogonale du point P sur **p**, suivons la variation de l'argument du vecteur $\overrightarrow{OP'}$ pendant que P décrit par exemple l'arc l_{ξ_1}. Le point P' décrira un arc continu, situé par hypothèse dans le demi-plan $\xi < \xi_1$. Ce demi-plan ne contenant pas le point O, la variation de l'argument du vecteur $\overrightarrow{OP'}$ ne dépendra que de la position initiale et de la position finale du point P'. La variation considérée est donc égale à celle qui résulterait si le point P' décrivait, en se mouvant toujours dans le même sens, le segment rectiligne rejoignant ces deux positions. En répétant le même raisonnement pour les arcs $l_{\eta_1}, l_{\xi_2}, l_{\eta_2}$, on voit finalement que l'indice du point O par rapport à C' est égal à l'indice par rapport à un quadrilatère dont les sommets sont les projections des quatre points déterminant les arcs $l_{\xi_1}, \ldots, l_{\eta_2}$ sur la courbe C. Des hypothèses admises sur la situation des projections de ces arcs il résulte immédiatement que les côtés de ce quadrilatère ne s'entre-coupent pas et que le point O est situé à son intérieur; par conséquent, l'indice est égal à $\pm 1 \neq 0$, ce qui démontre (§ 2, n° 4) que le point O est contenu dans le noyau restreint de la projection de S sur **p**.

17) Geöcze, l. c. 14).

7. Appliquons ce résultat à une surface S donnée par une équation $z=f(x,y)$, la fonction $f(x,y)$ étant uniforme et continue dans le carré fermé $Q: 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1$. Nous obtiendrons des limites inférieures explicites pour l'aire $L[S]$

Soit R un rectangle contenu dans Q et défini par $x' \leqq x \leqq x''$, $y' \leqq y \leqq y''$. Désignons par S_R la portion de surface située au-dessus de R. Soient $N_R^{xy}, N_R^{yz}, N_R^{zx}$ les noyaux restreints des projections orthogonales de S_R sur les plans xy yz, zx. Posons[18])

$$\alpha_R[f] = \int_{x'}^{x''} |f(x,y'') - f(x,y')|\, dx,$$

$$\beta_R[f] = \int_{y'}^{y''} |f(x'',y) - f(x',y)|\, dy, \quad \gamma_R = (x''-x')(y''-y'), \tag{14}$$

$$g_R[f] = \left((\alpha_R[f])^2 + (\beta_R[f])^2 + (\gamma_R)^2 \right)^{1/2}$$

Nous allons démontrer l'inégalité

$$g_R[f] \leqq L[S_R].^{19)} \tag{15}$$

Considérons N_R^{zx}; nous montrerons d'abord que tout point (x_0, z_0) du plan xz vérifiant les inégalités

$$\left(f(x_0,y'') - z_0\right)\left(f(x_0,y') - z_0\right) < 0, \; x' < x_0 < x'' \tag{16}$$

appartient à N_R^{zx}. Pour fixer les idées, supposons que

$$f(x_0,y'') - z_0 > 0, \; f(x_0,y') - z_0 < 0,$$

donc

$$f(x_0,y'') - z_0 > \mu, \; f(x_0,y') - z_0 < -\mu,$$

où μ désigne une quantité positive convenablement choisie. La fonction $f(x,y)$ étant continue, nous pouvons déterminer une quantité positive σ, de sorte que

$$f(x,y'') - z_0 > \mu, \; f(x,y') - z_0 < -\mu, \text{ pour } x_0 - \sigma \leqq x \leqq x_0 + \sigma.$$

Soit R^* le rectangle du plan xy défini par $x_0 - \sigma \leqq x \leqq x_0 + \sigma$, $y' \leqq y \leqq y''$, et soit S_{R^*} la portion de surface située au-dessus de R^*. Nous pouvons alors appliquer le résultat du numéro précédent à la projection de S_{R^*} sur le plan zx, en prenant par exemple

$$\xi_1 = x_0 - \frac{\sigma}{2}, \; \xi_2 = x_0 + \frac{\sigma}{2}, \; \eta_1 = z_0 - \mu, \; \eta_2 = z_0 + \mu.$$

---

[18]) Les expressions (14) furent introduites par GEÖCZE dans sa Thèse, l. c. [8]). Dans ses recherches récentes, M. TONELLI s'était servi d'expressions analogues; voir ses Notes aux *Rendiconti della Accademia dei Lincei*, serie 6ª, 3, 1926, pp. 357, 445, 633, 714.

[19]) GEÖCZE, l. c. [8]) et [14]).

Il résulte que tout point du plan zx, contenu dans le rectangle

$$x_0 - \frac{\sigma}{2} < x < x_0 + \frac{\sigma}{2}, \; z_0 - \mu < z < z_0 + \mu$$

(donc, en particulier, le point (x_0, z_0)) appartient au noyau restreint de la projection de S_{R^*}, par conséquent (§ 2, n° 2) aussi au noyau restreint N_R^{zx} de la projection de S_R, puisque la surface S_{R^*} est sous-ensemble de S_R.

Les points (x_0, z_0) du plan xz, vérifiant les inégalités (16), constituent un ensemble ouvert dont la mesure est évidemment égale à

$$\int_{x'}^{x''} |f(x,y'') - f(x,y')| \, dx = \alpha_R[f].$$

Cet ensemble ouvert étant sous-ensemble de N_R^{zx}, nous aurons

$$\alpha_R[f] \leqq m N_R^{zx}, \tag{17}$$

et d'une manière analogue

$$\beta_R[f] \leqq m N_R^{yz}. \tag{18}$$

Quant à N_R^{xy}, la remarque faite au début du n° 5, § 2 montre immédiatement que ce noyau contient tout point du rectangle ouvert R; par conséquent

$$\gamma_R \leqq m N_R^{xy}. \tag{19}$$

Les inégalités (17), (18), (19) fournissent

$$g_R[f] = \left((\alpha_R[f])^2 + (\beta_R[f])^2 + (\gamma_R)^2\right)^{1/2} \leqq$$
$$\leqq \left[(m N_R^{zx})^2 + (m N_R^{yz})^2 + (m N_R^{xy})^2\right]^{1/2}.$$

Mais (§ 2, n° 3) le dernier membre est au plus égal à $L[S_R]$; donc $g_R[f] \leqq L[S_R]$, c. qu. f. d.

Soit maintenant D une décomposition du carré Q en rectangles, obtenus à l'aide de droites parallèles aux axes coordonnées. Introduisons la *somme de* Geöcze

$$G_Q[f; D] = \sum g_R[f],^{20)} \tag{20}$$

la sommation étant étendue aux divers rectangles de la décomposition D. Nous aurons d'abord, en vertu du résultat précédent, $G_Q[f;D] \leqq \sum L[S_R]$. Les diverses surfaces simples S_R, situées au-dessus des divers rectangles de D, étant sans points communs intérieurs, on aura (§ 1, n° 8)

$$\sum L[S_R] \leqq L[S],$$

donc

$$G_Q[f; D] \leqq L[S]. \tag{21}$$

---

20) Geöcze, l. c. 8).

Cette inégalité, due à GEÖCZE et retrouvée sous une forme légèrement différente par M. TONELLI,[21] conduit à des formules générales pour l'aire L que nous développerons au § suivant.

§ 3. Surfaces données par une équation $z=f(x,y)$.

1. Dans la suite, Q désignera le carré fermé $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$. La fonction $f(x,y)$ étant continue dans Q, l'équation $z=f(x,y)$ représente une surface simple; en modifiant la notation employée dans le cas général, nous désignerons l'aire de la surface proposée par $L_Q[f]$. Nous nous proposons d'exprimer l'aire $L_Q[f]$ à l'aide de la fonction f.

Nous ferons d'abord quelques remarques évidentes sur les suites convergentes de surfaces du type considéré. Soit $\{h_n\}$ une suite de quantités non-négatives tendant vers zéro, Q_n le carré $h_n \leqq x \leqq 1-h_n$, $h_n \leqq y \leqq 1-h_n$, et $f_n(x,y)$ une fonction continue dans Q_n. Le point (x,y) variant dans Q_n, posons

$$\delta_n = \max |f(x,y) - f_n(x,y)|.$$

Si $\delta_n \to 0$, la suite des surfaces $z=f_n(x,y)$ tend, au sens de FRÉCHET, *vers la surface $z=f(x,y)$.* Posons en effet

$$x_n = h_n + (1-2h_n)\,x, \quad y_n = h_n + (1-2h_n)\,y$$

et faisons correspondre au point $\bigl(x, y, f(x,y)\bigr)$ de la surface $z=f(x,y)$ le point $\bigl(x_n, y_n, f_n(x_n, y_n)\bigr)$ de la surface $z=f_n(x,y)$. Nous obtenons de la sorte une transformation topologique T_n, dont le module tend vers zéro à cause de $\delta_n \to 0$, $h_n \to 0$; cela signifie que l'écart des surfaces $z=f(x,y)$ et $z=f_n(x,y)$ tend vers zéro.

Considérons en second lieu une suite de fonctions $\{\pi_n(x,y)\}$, continues dans le carré Q et définissant des surfaces polyédriques. Supposons que les sommets de ces surfaces polyédriques soient situés sur la surface $z=f(x,y)$, et que le diamètre maximum des faces du polyèdre $z=\pi_n(x,y)$ tende vers zéro pour $n \to \infty$. Dans ces conditions, la suite des polyèdres $z=\pi_n(x,y)$ tend, au sens de FRÉCHET, vers la surface $z=f(x,y)$. En tenant compte de la continuité uniforme de $f(x,y)$, la démonstration est immédiate.

2. Reprenons les notations du n° 7, § 2 et soit $\Gamma_Q[f]$ la limite supérieure des sommes de GEÖCZE $G_Q[f;D]$ pour toutes

[21] GEÖCZE, l. c. [8]), [14]); TONELLI, l. c. [18]).

les décompositions D du carré Q. En vertu de l'inégalité fondamentale (21), nous aurons aussi

$$\Gamma_Q[f] \leqq L_Q[f]. \tag{22}$$

Nous allons montrer qu'il y a toujours égalité: $\Gamma_Q[f] = L_Q[f]$. Nous établirons d'abord ce théorème, et du même coup plusieurs autres, pour le cas particulier où $f(x, y)$ admet des dérivées premières continues dans le carré fermé Q. Pour traîter ce cas simple et important nous nous servirons d'un raisonnement qui a été utilisé par GEÖCZE dans ses recherches générales[22]). Soit $\{D_n\}$ une suite de décompositions du carré Q en rectangles, telle que le diamètre maximum des rectangles de D_n tend vers zéro. Nous faisons correspondre à chaque rectangle $x' \leqq x \leqq x''$, $y' \leqq y \leqq y''$ de D_n deux triangles dans l'espace xyz ayant pour sommets les points

$$\big(x', y', f(x', y')\big), \big(x'', y', f(x'', y')\big), \big(x'', y'', f(x'', y'')\big),$$

respectivement

$$\big(x', y', f(x', y')\big), \big(x', y'', f(x', y'')\big), \big(x'', y'', f(x'', y'')\big).$$

Nous obtenons ainsi une surface simple polyédrique $\mathfrak{P}_n$ inscrite dans la surface proposée et représentable par une équation $z = \mathfrak{p}_n(x, y)$, où $\mathfrak{p}_n(x, y)$ est une fonction univoque et continue dans Q et $\mathfrak{p}_n(x, y) \to f(x, y)$ uniformément dans Q. Ces polyèdres $\mathfrak{P}_n$ tendent donc, au sens de FRÉCHET, vers la surface $z = f(x, y)$; par conséquent

$$\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n] \geqq L_Q[f], \tag{23}$$

en désignant, comme toujours, par A l'aire élémentaire.

Soit $G_Q[f; D_n]$ la somme de GEÖCZE correspondant à D_n. *Supposons que la suite $\{D_n\}$ ait été choisie de manière que l'on ait*

$$G_Q[f; D_n] - A[\mathfrak{P}_n] \to 0. \tag{24}$$

Cette relation fournit les suivantes

$$\underline{\lim}\, G_Q[f; D_n] = \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n], \quad \overline{\lim}\, G_Q[f; D_n] = \overline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n].$$

En tenant compte des inégalités (22), (23), il vient donc

$$\overline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n] = \overline{\lim}\, G_Q[f; D_n] \leqq \Gamma_Q[f] \leqq L_Q[f] \leqq \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n]. \tag{25}$$

Il en résulte, puisque la limite inférieure ne saurait dépasser la limite supérieure, que $\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n] = \overline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n]$. Cela signifie que la suite $A[\mathfrak{P}_n]$ est convergente; en vertu de (24) la suite $G_Q[f; D_n]$

[22]) GEÖCZE, l. c. [8]).

est donc également convergente. Cela étant, (25) fournit, pour $n\to\infty$,

$$L_Q[f]=\Gamma_Q[f]=\lim G_Q[f;D_n]=\lim A[\mathfrak{P}_n], \tag{26}$$

ce qui démontre, entre autres, le théorème $L_Q[f]=\Gamma_Q[f]$.

Dans ce raisonnement, l'hypothèse concernant la continuité des dérivées premières de $f(x,y)$ n'est point intervenue. En effet, ce raisonnement est parfaitement général; pour l'appliquer, il faut seulement construire une suite de décompositions pour laquelle (24) ait lieu. Cette construction représente précisément le point le plus délicat des recherches générales de GEÖCZE. Dans le cas particulier cependant, où les dérivées premières

$$\frac{\partial f}{\partial x}=p(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}=q(x,y)$$

sont continues dans le carré fermé Q, le raisonnement de GEÖCZE conduit facilement au but. On démontre aisément que dans ce cas *toute* suite $\{D_n\}$ jouit de la propriété (24). En effet, en utilisant les formules élémentaires de la géométrie analytique, on obtient pour l'aire d'un triangle ayant pour sommets les points

$$\big(x',y',f(x',y')\big),\ \big(x'',y',f(x'',y')\big),\ \big(x'',y'',f(x'',y'')\big),$$

la formule

$$\frac{1}{2}(x''-x')(y''-y')\left[1+\left(\frac{f(x'',y')-f(x',y')}{x''-x'}\right)^2+\left(\frac{f(x'',y'')-f(x'',y')}{y''-y'}\right)^2\right]^{1/2}.$$

En tenant compte de l'existence et de la continuité uniforme des dérivées premières $p(x,y)$, $q(x,y)$, on transforme d'abord cette expression en la suivante

$$\frac{1}{2}(x''-x')(y''-y')[1+p(\xi,y')^2+q(x'',\eta)^2]^{1/2},\quad x'<\xi<x'',\ y'<\eta<y'',$$

de laquelle il résulte immédiatement que l'aire élémentaire $A[\mathfrak{P}_n]$ de $\mathfrak{P}_n$ est une valeur approchée de l'intégrale, au sens de RIEMANN, de la fonction continue $(1+p^2+q^2)^{1/2}$. Donc

$$A[\mathfrak{P}_n]\to\iint\limits_{(Q)}(1+p^2+q^2)^{1/2}\,dx\,dy. \tag{27}$$

Quant à $G_Q[f;D_n]$, on observe d'abord que

$$\alpha_R[f]=\int_{x'}^{x''}|f(x,y'')-f(x,y')|\,dx=(x''-x')\,|f(\xi,y'')-f(\xi,y')|,$$

$$\text{où } x'\leqq\xi\leqq x''.$$

La dérivée $q(x,y)$ existant partout, on en tire

$$\alpha_R[f]=(x''-x')(y''-y')\,|q(\xi,\eta)|,\ \text{où } y'<\eta<y''.$$

En raisonnant de même sur $\beta_E[f]$, et en tenant compte de la continuité uniforme des dérivées $p(x, y)$, $q(x, y)$ on reconnaît finalement que $G_Q[f; D_n]$ est aussi une valeur approchée de l'intégrale $\iint_{(Q)} (1+p^2+q^2)^{1/2}\, dx\, dy$. Donc

$$G_Q[f; D_n] \to \iint_{(Q)} (1+p^2+q^2)^{1/2}\, dx\, dy. \tag{28}$$

Les suites $G_Q[f; D_n]$ et $A[\mathfrak{P}_n]$ tendant vers la même limite, la relation (24) est certainement vérifiée; nous pouvons donc écrire, en vertu de (26) et en tenant compte de (27), (28),

$$\begin{aligned} L_Q[f] = \Gamma_Q[f] = \iint_{(Q)} (1+p^2+q^2)^{1/2}\, dx\, dy = \\ = \lim G_Q[f; D_n] = \lim A[\mathfrak{P}_n]. \end{aligned} \tag{29}$$

Cette formule contient plusieurs théorèmes qu'il y a lieu de formuler.

3. La formule obtenue montre d'abord que l'on a, si $f(x, y)$ admet des dérivées premières continues,

$$L_Q[f] = \iint_{(Q)} (1+p^2+q^2)^{1/2}\, dx\, dy.$$

C'est la formule classique pour l'aire. Au cours de ses recherches importantes, M. TONELLI[23]) a établi les propriétés de $f(x, y)$ qui sont nécessaires et suffisantes pour la validité de cette formule; à présent, nous voulons seulement insister sur ce fait négatif que l'intégrale double peut avoir un sens sans représenter l'aire de la surface. Il y a lieu de préciser ce fait. Considérons le cas où $f(x, y)$ est indépendante de y; la surface $z=f(x, y)=f(x)$ est alors une portion d'une surface cylindrique, limitée par deux génératrices et deux sections normales. Si h désigne la longueur des génératrices, l la longueur des sections normales, les considérations utilisées en géométrie élémentaire pour calculer l'aire des surfaces cylindriques conduisent à attribuer à l'*aire intuitive* d'une telle portion de surface la valeur hl. Puisque $f(x, y)$ est définie dans $Q: 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, on a $h=1$, tandis que l est égale à la longueur de la courbe $y=0$, $z=f(x)$. Observons d'abord que dans le cas actuel $L_Q[f]$ fournit bien la valeur $1 \times l = l$ de l'aire intuitive. Soit en effet D une décomposition de Q en rectangles, obtenus à l'aide des valeurs

$$x_0=0<x_1<\ldots<x_j<\ldots<x_m=1, \quad y_0=0<y_1<\ldots<y_k<\ldots<y_n=1.$$

[23]) TONELLI, l. c. [18]).

On aura, en tenant compte du fait que $f(x, y)$ ne dépend pas de y, pour la somme de Geöcze correspondante

$$G_Q[f; D] = \sum_{j=0}^{m-1} [(x_{j+1} - x_j)^2 + (f(x_{j+1}) - f(x_j))^2]^{1/2}.$$

En faisant tendre le diamètre maximum des rectangles de D vers zéro, le second membre tend vers l; quant à $G_Q[f; D]$, nous verrons plus loin (§ 3, n° 8) qu'elle tend toujours vers $L_Q[f]$. Donc, dans le cas où $f(x, y)$ est indépendante de y, $L_Q[f]$ est égale à l'aire intuitive.

Passons à l'intégrale double, en supposant qu'elle ait un sens. On aura $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ identiquement, et $\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x)$, pour toute valeur de x où $f'(x)$ existe. Donc

$$\iint_{(Q)} (1 + p^2 + q^2)^{1/2}\, dx\, dy = \int_0^1 (1 + f'(x)^2)^{1/2}\, dx.$$

En choisissant pour $f(x)$ la fonction monotone bien connue pour laquelle $f'(x) = 0$ presque partout, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$,[24]) l sera finie et l'on aura évidemment $l \geqq \sqrt{2}$, puisque la longueur d'un arc de courbe est au moins égale à la distance de ses extrémités. D'autre part, puisque $f'(x) = 0$ presque partout, l'intégrale double fournit la valeur 1, inférieure à l'aire intuitive.

On voit donc qu'il y a des cas où $L_Q[f]$ et l'intégrale double fournissent des valeurs différentes et où l'on peut constater que c'est $L_Q[f]$ qui est égale à l'aire intuitive.

4. La formule (29) contient encore le théorème que pour toute suite de surfaces polyédriques inscrites construites à l'aide de décompositions rectangulaires du carré Q (j'entends par là la construction employée au n° 2, § 3), les aires élémentaires tendent vers l'aire de la surface, pourvu que $f(x, y)$ possède des dérivées premières continues. Dans le cas général, on ne sait même pas s'il existe une seule suite de surfaces polyédriques jouissant de ces propriétés; au cours de ses recherches, Geöcze fut amené à énoncer l'avis que dans le cas général il n'en existe aucune.[25]) L'étude approfondie de cette question pourrait conduire

[24]) Cf. par ex. H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, p. 13.

[25]) Geöcze, Contributions à la quadrature de la surface $z = f(x, y)$ (en hongrois), *Mathematikai és természettudományi értesitő* **26**, 1908, pp. 475—512, en particulier p. 512.

à des résultats importants concernant *le problème de la quadrature* au sens de Geöcze; il entend par là le problème de construire, par un procédé régulier, une suite de surfaces polyédriques, tendant vers la surface proposée, dont les aires élémentaires tendent précisément vers l'aire de celle-ci.

5. Considérons en dernier lieu les théorèmes

$$L_Q\,[f] = \Gamma_Q\,[f] = \lim G_Q[f; D_n], \tag{30}$$

contenus dans la formule (29) pour le cas où $f(x, y)$ possède des dérivées premières continues. Geöcze a énoncé ces théorèmes pour le cas général où $f(x, y)$ est soumise à la seule restriction d'être continue; il n'a cependant donné la démonstration que pour le cas où $f(x, y)$ satisfait à une condition de Lipschitz, en se servant du raisonnement que nous avons exposé plus haut (n° 2, § 3).[26]) Ce raisonnement fournit, toutes les fois que l'on sache l'appliquer, une suite de polyèdres inscrits, construits à l'aide de décompositions rectangulaires, dont les aires élémentaires tendent précisément vers l'aire de la surface $z = f(x, y)$. L'existence d'une telle suite constitue donc une condition nécessaire pour que le raisonnement de Geöcze s'applique; il a été observé au numéro précédent que l'on ne sait pas si cette condition est remplie dans le cas général.

La formule (30) résulte, pour un cas beaucoup plus général que celui envisagé par Geöcze, des recherches récentes de M. Tonelli. En vertu des résultats de M. Tonelli, on a toujours

$$\iint\limits_{(Q)} (1 + p^2 + q^2)^{1/2}\, dx\, dy \leqq \Gamma_Q\,[f] \leqq L_Q[f].$$

Il en résulte $\Gamma_Q[f] = L_Q[f]$ pour le cas où l'aire $L_Q[f]$ est égale à l'intégrale double classique; ceci aura lieu, d'après M. Tonelli, si $f(x, y)$ est absolument continue et seulement dans ce cas.[27])

6. Pour démontrer la formule (30) dans le cas général où $f(x, y)$ est soumise à la seule restriction d'être continue, nous utiliserons la méthode qui a déjà été esquissée au § 1, n° 5. Nous nous servirons donc de surfaces d'approximation dont les aires restent inférieures à l'aire de la surface proposée.[28])

[26]) Geöcze, l. c. [8]); voir aussi *Mathematikai és Physikai Lapok* **20**, 1911, pp. 255—301.

[27]) Tonelli, l. c. [18]).

[28]) Voir mes Notes: Sur le calcul de l'aire des surfaces courbes, C. R. t. 183, 11 octobre 1926; Sur l'aire des surfaces courbes, *ibid.*, t. 184, 10 janvier 1927; Sur le calcul de l'aire des surfaces courbes, *Fundamenta Mathematicae*, t. X, pp. 197—210.

Supposons que nous ayons démontré, pour toute valeur positive assez petite de h, l'existence d'une fonction $f_h(x, y)$ jouissant des propriétés suivantes.

a) $f(x, y)$ est définie et continue, ainsi que ses dérivées premières, dans le carré fermé Q_h: $h \leqq x \leqq 1-h, h \leqq y \leqq 1-h$.

b) La limite supérieure $\Gamma_{Q_h}[f_h]$ des sommes de Geöcze relatives à la fonction $f_h(x, y)$ et au carré Q_h ne dépasse pas la limite supérieure $\Gamma_Q[f]$ des sommes de Geöcze relatives à la fonction $f(x, y)$ et au carré Q.

c) Pour $h \to 0$, les surfaces $z = f_h(x, y)$ tendent, au sens de Fréchet, vers la surface proposée $z = f(x, y)$.

Admettons l'existence de ces fonctions $f_h(x, y)$; le théorème $L_Q[f] = \Gamma_Q[f]$ est alors immédiat. En effet, $f_h(x, y)$ admettant des dérivées premières continues dans Q_h, nous aurons (§ 3, n° 2)

$$\Gamma_{Q_h}[f_h] = L_{Q_h}[f_h].$$

Donc, en vertu de *b)* et de l'inégalité fondamentale (22),

$$L_{Q_h}[f_h] \leqq \Gamma_Q[f] \leqq L_Q[f]. \tag{31}$$

Les surfaces $z = f_h(x, y)$ possèdent donc des aires au plus égales à l'aire de $z = f(x, y)$; en outre, ces surfaces tendent, en vertu de l'hypothèse *c)*, vers $z = f(x, y)$. Il en résulte (§ 1, n° 5)

$$L_Q[f] = \lim_{h \to 0} L_{Q_h}[f_h]. \tag{32}$$

Dès lors, la formule $L_Q[f] = \Gamma_Q[f]$ résulte immédiatement de (31) en y faisant tendre h vers zéro.

Tout revient donc à démontrer l'existence des fonctions $f_h(x, y)$. Nous y arriverons, guidés par cette observation pratique que l'on diminue l'aire d'une surface en rendant son allure plus uniforme, en nivellant la surface proposée par le procédé classique des moyennes arithmétiques. Introduisons les *surfaces moyennes* $z = f_h(x, y)$ par la formule

$$f_h(x, y) = \frac{1}{4h^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} f(x+\xi, y+\eta)\, d\xi\, d\eta. \qquad (h \leqq x \leqq 1-h,\ h \leqq y \leqq 1-h) \tag{33}$$

Cette fonction $f_h(x, y)$ est définie et continue dans le carré fermé Q_h. Pour obtenir ses dérivées premières, observons que l'on peut écrire, en tenant compte de la continuité de $f(x, y)$,

$$f_h(x+\Delta x, y) - f_h(x, y) =$$

$$= \frac{1}{4h^2}\left[\int_{x+h}^{x+h+\Delta x} du \int_{-h}^{h} f(u, y+\eta)\, d\eta - \int_{x-h}^{x-h+\Delta x} du \int_{-h}^{h} f(u, y+\eta)\, d\eta\right] =$$

$$= \frac{\Delta x}{4h^2}\left[\int_{-h}^{h} f(u', y+\eta)\, d\eta - \int_{-h}^{h} f(u'', y+\eta)\, d\eta\right],$$

où

$$x+h \leqq u' \leqq x+h+\Delta x, \quad x-h \leqq u'' \leqq x-h+\Delta x.$$

Pour $\Delta x \to 0$, on a donc $u' \to x+h$, $u'' \to x-h$; par conséquent

$$\frac{\partial f_h}{\partial x} = \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\Big[f(x+h, y+\eta) - f(x-h, y+\eta)\Big]\, d\eta, \quad (34)$$

et d'une manière analogue

$$\frac{\partial f_h}{\partial y} = \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\Big[f(x+\xi, y+h) - f(x+\xi, y-h)\Big]\, d\xi. \quad (35)$$

Ces formules montrent que les dérivées premières de $f_h(x, y)$ sont continues dans Q_h; l'hypothèse *a)* est vérifiée. Quant à l'hypothèse *c)*, on obtient de (33), en désignant par $\omega(\lambda)$ le maximum de $|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|$ pour tout couple de points dans Q dont la distance ne dépasse pas λ,

$$|f_h(x, y) - f(x, y)| \leqq \omega(h\sqrt{2}) \text{ pour } (x, y) \text{ dans } Q_h.$$

Puisque $f(x, y)$ est uniformément continue, $\omega(h\sqrt{2}) \to 0$ pour $h \to 0$, donc (§ 3, n° 1) les surfaces $z = f_h(x, y)$ tendent au sens de Fréchet vers la surface $z = f(x, y)$. Passons à l'hypothèse *b)*. Soit $R: x' \leqq x \leqq x''$, $y' \leqq y \leqq y''$ un rectangle contenu dans Q_h. La formule (33) fournit immédiatement l'inégalité

$$|f_h(x, y'') - f_h(x, y')| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} |f(x+\xi, y''+\eta) - f(x+\xi, y'+\eta)|\, d\xi\, d\eta.$$

En intégrant de x' à x'' et en intervertissant l'ordre des intégrations (ce qui est évidemment permis puisque f est continue), nous obtenons (*cf.* (14))

$$a_R[f_h] \leqq \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} d\xi\, d\eta \int_{x'}^{x''} |f(x+\xi, y''+\eta) - f(x+\xi, y'+\eta)|\, dx. \quad (36)$$

Soit $R_{\xi\eta}$ le rectangle provenant de R par la translation $\bar{x} = x + \xi$, $\bar{y} = y + \eta$. Évidemment

$$\alpha_{R_{\xi\eta}}[f] = \int_{x'}^{x''} | f(x+\xi, y''+\eta) - f(x+\xi, y'+\eta) | \, dx,$$

de sorte que (36) exprime que

$$\alpha_R[f_h] \leqq \frac{1}{4h^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \alpha_{R_{\xi\eta}}[f] \, d\xi \, d\eta. \tag{37}$$

On obtient de même

$$\beta_R[f_h] \leqq \frac{1}{4h^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \beta_{R_{\xi\eta}}[f] \, d\xi \, d\eta. \tag{38}$$

Les rectangles R et $R_{\xi\eta}$ étant congruents, on a en outre

$$\gamma_R = \gamma_{R_{\xi\eta}} = \frac{1}{4h^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \gamma_{R_{\xi\eta}} \, d\xi \, d\eta. \tag{39}$$

Il vient donc de (37), (38), (39), en tenant compte de (14),

$$g_R[f_h] \leqq \frac{1}{4h^2} \Bigg[\Bigg(\int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \alpha_{R_{\xi\eta}}[f] \, d\xi \, d\eta \Bigg)^2 + \\ + \Bigg(\int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \beta_{R_{\xi\eta}}[f] \, d\xi \, d\eta \Bigg)^2 + \Bigg(\int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \gamma_{R_{\xi\eta}} \, d\xi \, d\eta \Bigg)^2 \Bigg]^{1/2}. \tag{40}$$

Or, en désignant par φ, ψ, χ trois fonctions intégrables dans un même domaine Δ d'un nombre quelconque de dimensions, on a l'inégalité bien connue, conséquence immédiate de l'inégalité élémentaire (9),

$$\left[\left(\int_\Delta \varphi \right)^2 + \left(\int_\Delta \psi \right)^2 + \left(\int_\Delta \chi \right)^2 \right]^{1/2} \leqq \int_\Delta (\varphi^2 + \psi^2 + \chi^2)^{1/2}$$

En l'appliquant au second membre de (40), il vient, en vertu de (14),

$$g_R[f_h] \leqq \frac{1}{4h^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} g_{R_{\xi\eta}}[f] \, d\xi \, d\eta. \tag{41}$$

En écrivant (41) pour chacun des rectangles d'une décomposition $D^{(h)}$ du carré Q_h, on obtient par sommation

$$G_{Q_h}[f_h; D^{(h)}] \leqq \frac{1}{4h^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \Big(\sum g_{R_{\xi\eta}}[f] \Big) \, d\xi \, d\eta. \tag{42}$$

La somme $\sum g_{R_{\xi\eta}}[f]$ a une signification évidente: c'est une somme de GEÖCZE relative à la fonction $f(x, y)$ et au carré provenant de Q_h par la translation $\bar{x} = x + \xi$, $\bar{y} = y + \eta$. Le carré ainsi obtenu étant contenu dans le carré Q, la somme en question sera a fortiori au plus égale à la limite supérieure $\Gamma_Q[f]$ des sommes de GEÖCZE relatives à f et au carré Q. L'inégalité (42) fournit donc

$$G_{Q_h}[f_h; D^{(h)}] \leqq \frac{\Gamma_Q[f]}{4h^2} \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} d\xi\, d\eta = \Gamma_Q[f].$$

Cette inégalité étant vérifiée pour toute décomposition $D^{(h)}$ du carré Q_h, on en conclut $\Gamma_{Q_h}[f_h] \leqq \Gamma_Q[f]$, c. qu. f. d.

Le théorème $L_Q[f] = \Gamma_Q[f]$ est ainsi complètement démontré. En outre, puisque les fonctions $f_h(x, y)$ possèdent les propriétés *a)*, *b)*, *c)*, la formule (32) s'applique et conduit à une expression explicite pour l'aire $L_Q[f]$. En effet, $f_h(x, y)$ admettant des dérivées premières continues dans Q_h, on a (§ 3, n° 3)

$$L_{Q_h}[f_h] = \iint\limits_{(Q_h)} \left[1 + \left(\frac{\partial f_h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_h}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} dx\, dy,$$

donc, en vertu de (32) et en tenant compte des formules (34), (35),

$$L_Q[f] = \lim_{h \to 0} \int_h^{1-h}\int_h^{1-h} \left[1 + \left(\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h} (f(x+h, y+\eta) - f(x-h, y+\eta))\, d\eta\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h} (f(x+\xi, y+h) - f(x+\xi, y-h))\, d\xi\right)^2\right]^{1/2} dx\, dy. \qquad (42')$$

Rappelons que nous avons obtenu ces résultats sous la seule hypothèse de la continuité de $f(x, y)$; nous n'avons même pas supposé que l'aire $L_Q[f]$ soit finie.[29])

7. On voit que les résultats précédents sont des conséquences immédiates du fait que les aires des surfaces moyennes sont au

[29]) En complétant les résultats contenus dans ses Notes l. c. [18]), M. TONELLI vient d'annoncer que les polynomes de STIELTJES qu'il a utilisés l. c. [18]) fournissent des surfaces d'approximation dont les aires tendent vers l'aire de la surface proposée, si l'aire de celle-ci est finie (voir la relation sur la réunion à Bologne au *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, Anno 5, n° 5, p. 253). Ce résultat fournit pour l'aire une expression analogue à (42'). Dans la théorie de la longueur des courbes, les polynomes de STIELTJES à une seule variable jouent un rôle analogue; voir TONELLI, Sopra alcuni polinomi approssimativi, *Annali di Matematica*, t. XXV, 1916.

plus égales à l'aire de la surface primitive. On peut rattacher cette propriété des surfaces moyennes à un fait géométrique classique. Soient $z = f_1(x, y)$, $z = f_2(x, y)$ deux surfaces définies dans une même région du plan xy; la surface

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2}\big(f_1(x, y) + f_2(x, y)\big)$$

possède, d'après STEINER, une aire au plus égale à la moyenne arithmétique des aires des surfaces $z = f_1(x, y)$, $z = f_2(x, y)$.[30]) Par égard à la formule (33), l'inégalité relative aux aires des surfaces moyennes $z = f_h(x, y)$ peut donc être considérée comme une généralisation de ce théorème de STEINER.[31])

Il y a lieu d'observer que STEINER énonce son théorème mentionné sans préciser la notion de l'aire et la généralité des surfaces dont il s'agit. Nous pouvons constater aisément que le théorème de STEINER tient pour l'aire L sous la seule hypothèse de la continuité des surfaces considérées. Soient

$$f_1(x, y), f_2(x, y), f(x, y) = \frac{1}{2}\big(f_1(x, y) + f_2(x, y)\big)$$

des fonctions continues dans le carré Q. En tenant compte de l'inégalité élémentaire (9), indiquée au § 2, n° 1, il résulte immédiatement des formules de définition (14), (20) que

$$G_Q[f; D] \leqq \frac{1}{2}(G_Q[f_1; D] + G_Q[f_2; D])$$

pour toute décomposition D de Q. Par conséquent, en vertu de l'inégalité fondamentale (21),

$$G_Q[f; D] \leqq \frac{1}{2}(L_Q[f_1] + L_Q[f_2]).$$

Cette inégalité étant vérifiée pour toute décomposition D, on aura aussi

$$L_Q[f] \leqq \frac{1}{2}(L_Q[f_1] + L_Q[f_2]),$$

puisque $L_Q[f]$ est égale, comme nous l'avons démontré, à la limite

---

30) J. STEINER, Gesammelte Werke, Bd. II, S. 298.

31) La longueur des courbes donne lieu à des généralisations analogues. Cf. PÓLYA-SZEGŐ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, zweiter Abschnitt, problèmes 87, 88; voir en particulier le beau théorème de F. LUKÁCS concernant les moyennes arithmétiques des séries de FOURIER, *ibid.*, p. 213.

supérieure des sommes de Geöcze. Un raisonnement analogue s'applique évidemment à un nombre quelconque de surfaces.

8. Nous allons compléter la formule $L_Q[f]=\Gamma_Q[f]$ par le théorème suivant, fournissant pour l'aire $L_Q[f]$ une méthode de calcul analogue à celle qui sert de définition pour la longueur des courbes.

Soit $\{D_n\}$ une suite de décompositions du carré Q, telles que le diamètre maximum des rectangles de D_n tend vers zéro. On aura

$$L_Q[f]=\lim_{n\to\infty} G_Q[f;D_n]. \tag{42''}$$

Puisque nous savons déjà que $L_Q[f]=\Gamma_Q[f]$, il s'agit de démontrer le fait purement analytique que toute suite de sommes de Geöcze tend vers la limite supérieure de ces sommes, pourvu que le diamètre maximum des rectangles des décompositions utilisées tende vers zéro. Ce fait résulte comme corollaire immédiat de certains résultats de M. Tonelli, concernant les sommes d'une structure analogue qu'il a introduites au cours de ses recherches; nous n'aurons donc qu'à reproduire presque textuellement le raisonnement de M. Tonelli.[32])

Nous aurons à traîter séparément le cas où $L_Q[f]$ est infinie; commençons donc par une condition nécessaire et suffisante pour que $L_Q[f]$ soit finie. Soit $V_{(y)}(x)$ la variation totale de la fonction $f(x, y)$, considérée comme fonction de y seule, dans l'intervalle $0\leqq y\leqq 1$; nous définissons d'une manière analogue la fonction $V_{(x)}(y)$. La mesurabilité des fonctions $V_{(x)}(y)$, $V_{(y)}(x)$ sera établie plus bas; ce point admis, *la condition nécessaire et suffisante pour que l'aire $L_Q[f]$ soit finie consiste en la sommabilité des fonctions $V_{(y)}(x)$, $V_{(x)}(y)$ dans les intervalles de définition $0\leqq x\leqq 1$ respectivement $0\leqq y\leqq 1$.*[33])

Pour démontrer ce théorème, considérons une décomposition obtenue à l'aide des valeurs

$$x_0=0<x_1<\ldots<x_j<\ldots<x_m=1,\quad y_0=0<y_1<\ldots<y_k<\ldots<y_n=1.$$

Introduisons les fonctions auxiliaires, continues dans les intervalles $0\leqq x\leqq 1$, resp. $0\leqq y\leqq 1$,

---

[32]) Tonelli, l. c. [18])

[33]) Aux notations près, le théorème se trouve chez Geöcze, l. c. [8]) et dans son travail: Sur la condition nécessaire et suffisante etc. (en hongrois), *Math. és Phys. Lapok* **25**, 19 6, pp. 61—81. Le théorème fut retrouvé par M. Tonelli; voir l. c. [18]).

$$v_{(y)}(x; D) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x, y_{k+1}) - f(x, y_k)|,$$
$$v_{(x)}(y; D) = \sum_{j=0}^{m-1} |f(x_{j+1}, y) - f(x_j, y)|. \tag{43}$$

On obtient, en tenant compte des formules (14),

$$\int_0^1 v_{(y)}(x; D)\,dx = \sum \alpha_R[f], \int_0^1 v_{(x)}(y; D)\,dy = \sum \beta_R[f], \tag{44}$$

la sommation étant étendue aux rectangles de D. En faisant tendre le diamètre maximum des rectangles de D vers zéro, on a évidemment

$$\lim v_{(y)}(x; D) = V_{(y)}(x), \ \lim v_{(x)}(y; D) = V_{(x)}(y), \tag{45}$$

les fonctions $V_{(y)}(x)$, $V_{(x)}(y)$ sont donc mesurables. Ceci posé, supposons seulement qu'il existe une suite de décompositions $\{ D_n \}$, le diamètre maximum des rectangles de D_n tendant vers zéro, et telles que

$$G_Q[f; D_n] < M, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{46}$$

où M désigne une quantité finie. Moyennant les inégalités

$$\sum \alpha_R[f], \sum \beta_R[f] \leqq \sum g_R[f] = G_Q[f; D]$$

nous obtenons des formules (44), (46)

$$\int_0^1 v_{(y)}(x; D_n)\,dx, \int_0^1 v_{(x)}(y; D_n)\,dy < M. \tag{47}$$

En vertu d'un lemme important de Fatou, concernant les suites de fonctions non-négatives, il résulte de (45), (47) que les fonctions $V_{(y)}(x)$, $V_{(x)}(y)$ sont sommables. L'hypothèse (46) est certainement vérifiée, par égard à l'inégalité fondamentale (21), si l'aire $L_Q[f]$ est finie; nous avons donc démontré que la sommabilité des fonctions $V_{(y)}(x)$, $V_{(x)}(y)$ est une condition nécessaire pour que $L_Q[f]$ soit finie.

Supposons en second lieu la sommabilité de $V_{(y)}(x)$, $V_{(x)}(y)$. Évidemment

$$v_{(y)}(x; D) \leqq V_{(y)}(x), \ v_{(x)}(y; D) \leqq V_{(x)}(y), \tag{48}$$

donc, en vertu de (44),

$$\sum \alpha_R[f] \leqq \int_0^1 V_{(y)}(x)\,dx, \ \sum \beta_R[f] \leqq \int_0^1 V_{(x)}(y)\,dy.$$

Il en résulte, puisque $g_R[f] \leqq \alpha_R[f] + \beta_R[f] + \gamma_R$, pour toute décomposition D

$$G_Q[f;D] = \sum g_R[f] \leqq \int_0^1 V_{(y)}(x)\,dx + \int_0^1 V_{(x)}(y)\,dy + 1.$$

Puisque $L_Q[f]$ est égale à la limite supérieure des sommes de Geöcze, on aura aussi

$$L_Q[f] \leqq \int_0^1 V_{(y)}(x)\,dx + \int_0^1 V_{(x)}(y)\,dy + 1.$$

L'aire $L_Q[f]$ est donc finie, si $V_{(y)}(x)$, $V_{(x)}(y)$ sont sommables.

9. Passons à la démonstration de la formule (42″) en supposant d'abord que $L_Q\,[f] = +\infty$. Si le théorème n'était pas vrai en ce cas, on aurait pour une certaine suite $\{D_n\}$

$$G_Q\,[f;D_n] < M,$$

la constante M étant finie. En tenant compte des résultats du numéro précédent, cette inégalité conduit à une contradiction avec l'hypothèse $L_Q\,[f] = +\infty$. En effet, cette inégalité entraîne la sommabilité des fonctions $V_{(y)}\,(x)$, $V_{(x)}\,(y)$, et la sommabilité de $V_{(y)}\,(x)$, $V_{(x)}\,(y)$ est une condition suffisante pour que $L_Q\,[f]$ soit finie.

Supposons en second lieu que $L_Q\,[f]$ soit finie. En ce cas, on arrive au but à l'aide d'un lemme, concernant les fonctions de rectangle, que nous allons d'abord formuler. Soit $\psi\,(R)$ une fonction de rectangle, définie pour tout rectangle contenu dans Q et jouissant des propriétés suivantes.

a) On a toujours $\psi\,(R) \geqq 0$.

b) En décomposant un rectangle R, par une droite parallèle à l'une des axes x, y, en deux rectangles R_1, R_2, on a

$$\psi\,(R) \leqq \psi\,(R_1) + \psi\,(R_2).$$

Pour énoncer la troisième propriété, soient

$$y_0 = 0 < y_1 < \ldots < y_k < \ldots < y_n = 1$$

des points de division sur l'axe des y, et $x', x'' > x'$ deux points sur l'axe des x. Nous dirons que les rectangles

$$R_k\colon x' \leqq x \leqq x'',\ y_k \leqq y \leqq y_{k+1},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1 \tag{49}$$

constituent une bande verticale de largeur $x'' - x'$; les bandes horizontales se définissent d'une manière analogue. Voilà maintenant la troisième propriété de $\psi\,(R)$.

c) À tout nombre $\varepsilon > 0$ il correspond un $\delta > 0$, de sorte que $\psi\,(R_0) + \psi\,(R_1) + \ldots + \psi\,(R_{n-1}) < \varepsilon$, pourvu que les rectangles $R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}$ constituent une bande de largeur moindre que δ.

L e m m e. Soit $\psi\,(R)$ une fonction de rectangle jouissant des propriétés *a*), *b*), *c*). En désignant par D une décomposition de Q

en rectangles, posons $\Psi(D) = \sum \psi(R)$, la sommation étant étendue à tous les rectangles de D. Soit enfin Ψ la limite supérieure des sommes $\Psi(D)$. *On aura dans ces conditions* $\Psi(D_n) \to \Psi$, *pour toute suite* $\{D_n\}$ *telle que le diamètre maximum des rectangles de* D_n *tend vers zéro.*

On démontre ce lemme par un raisonnement familier. absolument analogue à celui dont on se sert pour prouver le théorème de Darboux concernant les intégrales par défaut et par excès; nous n'insistons pas sur les détails.[34])

En tenant compte du lemme que nous venons de formuler, (42″) sera démontré si nous constatons que la fonction de rectangle $g_R[f]$, définie par les formules (14), jouit des propriétés *a*), *b*), *c*). Les propriétés *a*) et *b*) se déduisent immédiatement de la définition de $g_R[f]$. Pour vérifier *c*), considérons par ex. une bande verticale comprenant les rectangles (49). Nous aurons, en tenant compte des formules (14), (44), (48),

$$\sum_{k=0}^{n-1} g_{R_k}[f] \leq \int_{x'}^{x''} V_{(y)}(x)\,dx + \int_0^1 |f(x'',y) - f(x',y)|\,dy + x'' - x'. \tag{50}$$

Or. $\int_0^1 |f(x'',y) - f(x',y)|\,dy$ tend uniformément vers zéro pour $x'' - x' \to 0$, puisque f est continue. En second lieu $\int_{x'}^{x''} V_{(y)}(x)\,dx$ tend uniformément vers zéro pour $x'' - x' \to 0$, puisque $V_{(y)}(x)$ est sommable en vertu de l'hypothèse que $L_Q[f]$ est finie (§ 3, n° 8). Le second membre de l'inégalité (50) tend donc uniformément vers zéro pour $x'' - x' \to 0$, par conséquent le premier membre aussi, c. qu. f. d.

10. Dans tout ce paragraphe, nous avons supposé que la fonction $f(x,y)$ est donnée dans un carré. Cette restriction n'est pas essentielle; les résultats obtenus s'étendent facilement au cas où $f(x,y)$ est donnée dans une région $\mathfrak{M}$ limitée par une courbe C simple et fermée quelconque. Soit en effet S la surface simple $z = f(x,y)$, et soit $\mathfrak{M}^*$ une région simplement connexe, intérieure à $\mathfrak{M}$, et limitée par une ligne polygonale composée de segments parallèles aux axes x et y. En désignant par S^* la portion de surface située au-dessus de $\mathfrak{M}^*$, les considérations des numéros

[34]) Le lecteur les trouvera dans le livre de M. Tonelli, Fondamenti di calcolo delle variazioni, vol. I, p. 37.

précédents s'appliquent évidemment au calcul de l'aire de S^*. Or, l'aire de S^* est inférieure à l'aire de S; donc, en faisant tendre S^* vers S, l'aire de S^* tendra vers l'aire de S. On voit donc que le cas d'une courbe frontière générale du domaine dans lequel $f(x, y)$ est définie se ramène au cas où cette courbe frontière est composée par un nombre fini de segments parallèles aux axes x, y, c'est-à-dire à un cas où les développements précédents s'appliquent avec des modifications insignifiantes. En laissant au lecteur le soin de développer quelques détails n'offrant aucune difficulté, nous nous bornons à énoncer le résultat final. Soit $\mathfrak{M}$ une région simplement connexe du plan xy, limitée par une courbe fermée de JORDAN, et soit $f(x, y)$ une fonction uniforme et continue dans $\mathfrak{M}$. Pour tout rectangle R: $x' \leqq x \leqq x''$, $y' \leqq y \leqq y''$, tel que tout point intérieur de R soit aussi point intérieur de $\mathfrak{M}$, on définit les expressions $\alpha_R[f]$, $\beta_R[f]$, γ_R, $g_R[f]$ par les formules (14). Soit alors D une décomposition en rectangles du plan xy, et soit

$$G_{\mathfrak{M}}[f; D] = \sum{}' g_R[f],$$

la notation $\sum'$ indiquant que la sommation doit être étendue à ceux des rectangles de D dont tous les points intérieurs sont aussi intérieurs à $\mathfrak{M}$. Soit encore $L_{\mathfrak{M}}[f]$ l'aire de la surface simple $z = f(x, y)$. *On aura*

$$G_{\mathfrak{M}}[f; D_n] \to L_{\mathfrak{M}}[f],$$

pour toute suite $\{D_n\}$, *telle que le diamètre maximum des rectangles de* D_n *tend vers zéro.*

Szeged, avril 1927.

(Reçu le 10. avril 1927).